புள்ளியியல் – துணைப்பாடம்

(பட்டப் படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது)

பிற்சேர்க்கை

ஆசிரியர்

எஸ். கருப்பையா, எம்.ஏ.,

கணிதப் பேராசிரியர்,

பெரியார் ஈ. வெ. ரா. கல்லூரி,

திருச்சிராப்பள்ளி.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

புள்ளியியல் - துணைப்பாடம்

(பட்டப் படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது)

பிற்சேர்க்கை

ஆசிரியர்

எஸ். கருப்பையா, எம்.ஏ.,

கணிதப் பேராசிரியர்,

பெரியார் ஈ. வெ. ரா. கல்லூரி,

திருச்சிராப்பள்ளி.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

Supplement—September, 1972

Statistics-Ancillary-Supplement

S. KARUPPAIAH

Price Rs. 2-50

'Published by The Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.'

Printed by
Muthukumaran Press,
Madras-1.

பொருளடக்கம்

நிகழ் தகவு

நிகழ்தகவினைப் பற்றிய பல்வேறு செய்திகளை முன்னரே கண்டோம். தற்போது நவீன முறையில் நிகழ்தகவினை அணுகும் முறையைக் காண்போம். இந் நவீன முறைக்குப் பயன்படும் சில புள்ளியியல் சொற்களுக்குரிய விளக்கங்களைக் காண்போம்.

1. ராண்டம் சோதனை

விளைவுகள் அல்லது முடிவுகள் இன்னதாக இருக்கலாம் என முன்கூட்டியே சொல்லத் தகுந்த முறையில் அமைந்த சில சோதனைகள் உள ; ஆனால் வேறு சிலவற்றில் அச் சோதனைகளை நிகழ்த்திப் பாராமல் முடிவுகளைப்பற்றி யாதும் சொல்ல இயலாது. இங்ஙனம் முடிவுகளை முன்னதாகத் தீர்மானிக்க இயலாத சோதனைகளுக்கு ராண்டம் சோதனைகள் (Random Experiments) எனப் பெயராகும். ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டுதல், ஓர் அறுமுகப் பகடையை வீசுதல், ராண்டமாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒருவரின் உயரத்தை அல்லது பருமனை அளத்தல் போன்றவை ராண்டம் சோதனைகளாகும்.

2. ராண்டம் மாறி

ஒரு ராண்டம் சோதனையின் முடிவு நிகழ்ச்சியை ராண்டம் மாறி என வழங்குகின்றோம். அது ξ என்ற எழுத்தால் குறிக்கப்படுவது வழக்கமாகும்.

ஒரு நாணயத்தினைச் சுண்டும்போது அதன் விளைவு தலை அல்லது பூவாகும். தலையினை 1 என்ற எண்ணாலும் பூவினை 0 ஆலும் குறிப்பிடுவோம். இந் நாணயச் சோதனையில் இணைந்துள்ள ராண்டம் மாறி 0, 1 என்ற இரு மதிப்புகளைப் பெறமுடியும். அறுபக்கப்பகடை வீச்சினில், ராண்டம் மாறி 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்ற ஆறு மதிப்புகளைப் பெறமுடியும். ஒரு மரம், ஒரு மனிதன், ஒரு விலங்கு அல்லது ஒரு விண்பொருளின் உயரத்தின் அளவையைக்

குறிக்கும் ராண்டம் மாறி எண்ணற்ற மதிப்புகளைப் பெற முடியும். சுருக்கமாகக் கூறின், இந்த ராண்டம் மாறியின் மதிப்புகள் (0, ∞) என்ற எல்லைகளுக்குட்பட்ட எந்தவொரு எண்ணாகவும் இருக்கலாம். நாணயச் சுண்டுதல், பகடை வீசுதல் போன்றவற்றில் இணைந்துள்ள ராண்டம் மாறிகள் தொடர்பற்ற மதிப்புகளைப் (discrete values) பெறுகின்றதாகையால், அத்தகு மாறி தொடர்பற்ற மாறி (discrete variate) என வழங்கப்படுகிறது. 0-விலிருந்து ∞ வரையில் மதிப்புகளைப் பெறும் ராண்டம் மாறி தொடர் மாறி (Continuous variate) என வழங்கப்படுகிறது.

3. முழுமைத் தொகுதி

'Population' என்ற ஆங்கிலச் சொல், புள்ளியியலில் மக்கள் தொகை என்ற பொருளில்மட்டும் வருவதில்லை. பொதுவாக, இச் சொல் எண்ணற்ற அல்லது மிக அதிகமான உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு குழுவினைக் குறிக்கும் சொல்லாகக் கையாளப் படுகிறது. இதனைத் தமிழில் முழுமைத் தொகுதி என வழங்குவோம்.

ஒரு தொழிற் கூடத்தில் உற்பத்தியான வானொலிப் பெட்டிகளின் முழுமைத் தொகுதி, ஒரு தொழிற்கூடத்தில் உற்பத்தியான மின்விளக்குகளின் முழுமைத் தொகுதி, பல மனிதர்களின் உயரங்களாகிய முழுமைத் தொகுதி என்பன போன்ற பல்வேறு முழுமைத் தொகுதிகளை நாம் காணலாம். இத்தகைய முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள தனி உறுப்பானது ஒரு ராண்டம் சோதனையில் ஏற்படும் விளைவு என்பதனை எளிதாக உணரலாம். எனவே, ஒரு ராண்டம் மாறியின் மதிப்புகளின் கூட்டமே முழுமைத் தொகுதி எனக் கொள்ளலாம்.

4. கூறுவெளி

ஒரு ராண்டம் மாறி பெற இயலும் அனைத்து மதிப்புகளின் கூட்டத்தினை ஒரு வெளியில் உள்ள புள்ளிகளாகக் கருதலாம்.

ஒரு பகடை வீச்சினில், மாறியின் மதிப்புகள் 1 முதல் 6 ஆகும். அவற்றினை ஒரு நேர்கோடாகிய ஒற்றை அளவை வெளியில் (one dimensional space) உள்ள ஆறு புள்ளிகளாகக் கருதலாம். மனிதர்களின் உயர மாறியினை ஒரு நேர்கோட்டிலுள்ள —[0, 7] இடைவெளியாகக் கருதலாம். சில சோதனைகளில் இவ்விடைவெளி, (∞ , ∞) ஆக அமையும். ஒரு ராண்டம் சோதனையின் முடிவில் இரு விளைவுகள் பெறப்படுமாயின், அம் மாறிகளாகிய ξ_1, ξ_2 ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் ஓர் இரட்டை

வெளியில் உள்ள புள்ளிகளால் பிரதிபலிக்கலாம். இன்னும், பொதுவாகக் கூறின், ஒரு ராண்டம் சோதனையின் முடிவில் ξ_1 $\xi_2 \ldots \xi_k$ என்ற k விளைவுகளைப் பெற்றால் k அளவை வெளி மாறிகளாகக் கொண்டு, அவற்றினை k அளவை வெளியில் உள்ள புள்ளிகளாகக் கருதலாம்.

ஒரு ராண்டம் சோதனையின் முடிவுகளைப் பிரதிபலிக்கும் புள்ளிகளைக் கொண்டுள்ள வெளிக்குத்தான் கூறுவெளி (Sample space) அல்லது சோதனையின் நிகழ்ச்சி வெளி (Event space of the experiment) எனப் பெயரிடப் படுகிறது.

எனவே ஒரு கூறுவெளியின் உறுப்புகள் ஒரு ராண்டம் சோதனையில் இயலுகின்ற எல்லா விளைவுகளாகும். இந்த உறுப்புகளை கூறுபுள்ளிகள் (Sample points) என வழங்குகின்றோம். ஓர் அறுபக்கப் பகடை வீச்சில் $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ என்ற கணம் (set) தான் கூறுவெளியாகும்; கூறு புள்ளிகள் 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்பனவாகும்.

கூறுபுள்ளிகள் எண்ணத்தக்க அளவினில் அமைந்தால், அதனை எண்ணுறு கூறுவெளி (Finite sample space) என்றும் எண்ணற்ற அளவில் அமைந்தால் எண்ணற்ற கூறுவெளி (Infinite sample space) என்றும் இருவகையாகக் கூறலாம். இங்கு நாம் எண்ணுறு கூறுவெளிகளைப்பற்றி மட்டும் பார்க்கவிருக்கிறோம்.

5. நிகழ்ச்சி

ஒரு கூறுவெளி என்பது ஒரு கணம் எனக் கண்டோம். அதன் கிளைக் கணங்களில் (sub sets) ஒன்று S என்க. ஒரு சோதனை நிகழ்த்துகின்றபோது, அதன் விளைவு ξ என்பது S-ன் உறுப்பாகவோ அல்லாமலோ இருக்கலாம். அது S ஐச் சேர்ந்திருந்தால், $\xi \in S$ என்பதால் நிகழ்ச்சி E-க்கு வரைவிலக்கணம் கூறப்படுகிறது. எனவே, ஒரு சோதனையின் கூறு வெளி என்பது ஒரு கணமாகும். அக் கணத்தின் கிளைக்கணங்கள் நிகழ்ச்சிகளாகும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பகடை வீச்சினில், ஓர் இரட்டைப் படை எண் முகம் விழுவது $\{2, 4, 6\}$ என்ற கிளைக் கணமாகும். இக் கிளைக் கணம் ஒரு நிகழ்ச்சியாகும். இதுபோலவே 3-க்கு மிகையாக உள்ள முகம் விளைவானால் $\{4, 5, 6\}$ என்பது ஒரு நிகழ்ச்சியாகும். கூறுவெளியென்பதும் ஒரு நிகழ்ச்சியேயாகும். வெற்றுக்கணமும் (null set) ஒரு நிகழ்ச்சியாகும்; இதனை ϕ எனக் குறிக்கின்றோம்

ஒரு நிகழ்ச்சிக்குரிய நிகழ்தகவின் வரைவிலக்கணம்

A என்ற ஒரு நிகழ்ச்சிக்குரிய நிகழ்தகவு, A-யோடு இணைந்த கூறுபுள்ளிகளது நிகழ்தகவுகளின் கூடுதலேயாகும்.

$$P\{A\} = \sum_{A} p_i$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

ஒரு நாணயம் இரு தடவைகள் சுண்டப்படுகிறது. மொத்தத்தில் ஒரு தலையும் ஒரு பூவும் நிகழ்வதற்குரிய தகவு யாது?

இங்கு

$$\text{கூறுவெளி} = S = \{TH;\ HH;\ HT;\ TT\}$$

அல்லது

$$\{(1, 2);\ (2, 2);\ (2, 1);\ (1, 1)\}$$

$$\text{நிகழ்ச்சி} = E = \text{கிளைக்கணம்}$$

$$= \{TH;\ HT\}$$

அல்லது

$$\{(1, 2);\ (2, 1)\}$$

$$E\text{-ன் நிகழ் தகவு} = P\{E\}$$

$$= P\{(1, 2)\} + P\{(2, 1)\}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

இரு அறுபக்கப் பகடைகள் வீசப்படுகின்றன. இரு பகடைகளிலும் முக எண்களின் கூடுதல் 7 ஆக அமைவதற்குரிய நிகழ் தகவு யாது?

கூறு புள்ளிகள் :

1 1,	2 1,	3 1,	4 1,	5 1,	6 1
1 2,	2 2,	3 2,	4 2,	5 2,	6 2
1 3,	2 3,	3 3,	4 3,	5 3,	6 3
1 4,	2 4,	3 4,	4 4,	5 4,	6 4

1 5,	2 5,	3 5,	4 5,	5 5,	6 5
1 6,	2 6,	3 6,	4 6,	5 6,	6 6

கூறு வெளி : S :

1 1,	2 1,	3 1,	4 1,	5 1,	6 1
1 2,	2 2,	3 2,	4 2,	5 2,	6 2
1 3,	2 3,	3 3,	4 3,	5 3,	6 3
1 4,	2 4,	3 4,	4 4,	5 4,	6 4
1 5,	2 5,	3 5,	4 5,	5 5,	6 5
1 6,	2 6,	3 6;	4 6,	5 6,	6 6

கிளைக்கணம் : $E : \{ 61, 52, 43, 34, 25, 16 \}$

$$P(E) = \Sigma P_i$$

$$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

முக்கிய நிகழ்தகவு மெய்க்கூறுகள்

கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவனம் தேவைப்படாத மெய்த் தேற்றங்களாகக் கருதலாம்.

1. $0 \leq P(A_i) \leq 1$
2. $P(S) = 1$

ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சிகள்

இரு நிகழ்ச்சிகள் என்பன இரு கிளைக் கணங்களாகும். இவ்விரு கிளைக் கணங்களுக்கும் பொதுவான உறுப்புகள் இல்லை யெனில், அவை ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சி களாகும். இத்தகு நிகழ்ச்சிகள் ஒரே சமயத்தில் ஒன்ருக நிகழ மாட்டா.

நிகழ்தகவுக்கான சில குறியீடுகள்

1. $P\{A\}$ என்பது நிகழ்ச்சி A-ன் நிகழ்தகவினைக் குறிக்கும்.

2. $P\{A_1 A_2\}$ அல்லது $P\{A_1 \cap A_2\}$ என்பது, ஒரு சோதனை நடத்தும் போது A_1, A_2 ஆகிய இரு நிகழ்ச்சிகளும் நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவினைக் குறிக்கும்.

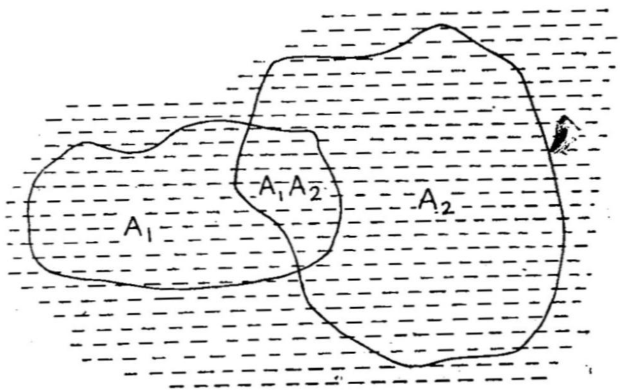
3. $P\{A_1 + A_2\}$ அல்லது $P\{A_1 \cup A_2\}$ என்பது ஒரு சோதனை நடத்தும் போது A_1, A_2 ஆகியவற்றில் ஒன்று அல்லது மற்றொன்று நிகழ்வதற்குரிய நிகழ் தகவினைக் குறிக்கும்.

4. $P\{A_1 \mid A_2\}$ என்பது A_2 ஏற்கெனவே நிகழ்ந்த நிலையில், A_1 நிகழ்வதற்குரிய நிகழ் தகவினைக் குறிக்கும்.

கூட்டுத் தேற்றம்

$$P\{A_1 + A_2\} = P\{A_1\} + P\{A_2\} - P\{A_1 A_2\}$$

நிறுவுதல்



ஒரு சோதனையின் கூறு வெளியினை மேலேயுள்ள படத்தில் காட்டியுள்ள புள்ளிகளின் சேர்க்கை பிரதிபலிக்கிறதெனக் கொள்வோம்.

A_1 நிகழ்ச்சியினை ஒட்டிய கூறு புள்ளிகள் A_1 பகுதியிலும், A_2 நிகழ்ச்சியினை யொட்டிய கூறு புள்ளிகள் A_2 பகுதியிலும் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளன. இரு பகுதிகளுக்கும் பொதுவான புள்ளிகள் $A_1 A_2$ என்று குறிப்பிடப்பட்ட பகுதியில் காட்டப்பட்டுள்ளன.

வரைவிலக்கணப்படி $P\{A_1 + A_2\}$ என்பது A_1, A_2 என்ற இரு பகுதியிலும் அடங்கியுள்ள புள்ளிகளின் நிகழ்தகவுகளின் கூடுதலாகும். $P\{A_1\}$ என்பது A_1 பகுதியில் உள்ள புள்ளிகளது நிகழ்தகவுகளின் கூடுதலாகும்; $P\{A_2\}$ என்பது A_2 பகுதியில் உள்ள புள்ளிகளது நிகழ்தகவுகளின் கூடுதலாகும். எனவே இங்கு $P\{A_1\} + P\{A_2\}$ என்பது A_1, A_2 ஆகிய இரு பகுதிகளிலும் அடங்கியுள்ள புள்ளிகளின் நிகழ்தகவுகளது கூடுதல் என்றாலும், $A_1 A_2$ என்ற பொதுப் பகுதியிலுள்ள புள்ளிகள் இரு தடவைகள் எண்ணப்படுகின்றன என்பதை எளிதில் காணலாம். அதாவது $P\{A_1 A_2\}$ இரு தடவை சேர்க்கப்படுகிறது. எனவே $P\{A_1 A_2\}$ கழிக்கப்பட வேண்டும். எனவே

$$P\{A_1 + A_2\} = P\{A_1\} + P\{A_2\} - P\{A_1 A_2\}$$

கிளைத் தேற்றங்கள்

1. A_1, A_3 என்பன ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சிகளானல், $A_1\, A_2$ என்பன இணைப்பற்ற கணங்களாகும் (Disjoint Sets). எனவே $P\{A_1 A_2\} = 0$ ஆகும்.

எனில் $P\{A_1 + A_2\} = P\{A_1\} + P\{A_2\}$

2. A_1, A_2, A_3 என்பன ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சிகளானல்,

$$P\{A_1 + A_2 + A_3\} = P\{A_1\} + P\{A_2\} + P\{A_3\}$$

இதனையே நிகழ்ச்சிகளுக்கு நீட்ட,

$$P\{A_1 + A_2 + \dots + A_n\} = P\{A_1\} + P\{A_2\} + \dots + P\{A_n\}$$

n நிகழ்ச்சிகளுக்குரிய மொத்த நிகழ்தகவுத் தேற்றம்

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} P(A_i A_j) +$$

$$\sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^{n} P(A_i A_j A_k) - \dots\dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots\dots A_n).$$

நிறுவுதல்

கூட்டுத் தேற்றத்தின்படி

$$P\{A + B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\}$$

இங்கு B என்பது A_1, A_2 இவற்றில் ஏதாவது ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழ்வதைக் குறிக்குமென்க.

$$\begin{aligned} P\{A + A_1 + A_2\} &= P\{A\} + P\{A_1 + A_3\} - P\{A(A_1 + A_2)\} \\ &= P\{A\} + P\{A_1\} + P\{A_2\} \\ &\quad - P\{A_1 A_2\} - P\{AA_1 + AA_2\} \\ &= P\{A\} + P\{A_1\} + P\{A_2\} - \\ &\quad P\{A_1 A_2\} - P\{AA_1\} - \\ &\quad P\{AA_2\} + P\{AA_1 A_2\} \end{aligned}$$

$A = A_3$ என வைப்பின்,

$$P\{A_1 + A_2 + A_3\} = P\{A_1\} + P\{A_2\} + P\{A_3\} - P\{A_1 A_2\} - P\{A_2 A_3\} - P\{A_3 A_1\} + P\{A_1 A_2 A_3\}$$

எனில், கணக்கியல் அடுத்தடுத்த முறையால் (Mathematical Induction), கீழ்க்கண்ட பொதுக் கூற்றினைக் காணலாம்.

$$P\{A_1 + A_2 + \dots + A_n\} = \sum_{i=1}^{n} P\{A_i\} - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} P(A_i A_j) + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^{n} P(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P\{A_1 A_2 \dots A_n\}$$

பெருக்குத் தேற்றம்

$$P\{A_1 A_2\} = P\{A_1\} \cdot P\{A_2/A_1\}$$
$$= P\{A_2\} \cdot P\{A_1/A_2\}$$

நிறுவுதல்

A_1 உறுதியாக நிகழுகின்ற நிலையில், A_2 நிகழ்வதற்குரிய தகவினை $P\{A_2/A_1\}$ குறிக்கும். இதுபோலவே A_1 உறுதியாக நிகழுகின்ற நிலையில், A_2 நிகழ்வதற்குரிய தகவினை $P\{A_1/A_2\}$ குறிக்கும்.

தற்போது A_1 உறுதியாக நிகழுகின்ற நிலையில் (படத்தில் A_1 பகுதியில் உள்ள பகுதியில் இதன் கூறு வெளியாகும்) A_2 நிகழ்வதற்குரிய தகவினைக் காண, A_1 கூறு வெளியினைவிடப் பரப்பில் குறைந்த புதியதொரு கூறு வெளிப்புள்ளிகளுக்கு நிகழ்தகவுகள் பொருத்தப்பட வேண்டும். இதற்கு A_1 பகுதியில் உள்ள புள்ளிகளுக்கு ஏற்கெனவே தரப்பட்டுள்ள தகவு p_i களை நிலை உறுப்பு C ஆல் பெருக்கி $\pi_i = C p_i$ என்ற நிகழ்தகவினை $\Sigma \pi_i = 1$ என அமையுமாறு தரலாம்.

$$\text{எனவே } 1 = \sum_{A_1} \pi_i = C \sum_{A_1} p_i$$
$$= CP\{A_1\}$$

$$\therefore \quad C = \frac{1}{P\{A_1\}}$$

தற்போது $\pi_i = C p_i$

$$\therefore \quad \pi_i = \frac{p_i}{P\{A_1\}}$$

இவ்வாறு புதுக் கூறு வெளியும், அதன் புள்ளிகளின் நிகழ் தகவுகளும் தீர்மானிக்கப்படுகின்றன.

எனவே $P\{A_2/A_1\} = \sum_{A_1 A_2} \pi_i$ { நிகழ்தகவு வரைவிலக் கணப்படி }

$$= \frac{\sum_{A_1 A_2} p_i}{P\{A_1\}}$$

ஆனால் $\sum_{A_1 A_2} p_i = P\{A_1 A_2\}$ என்பது தெளிவாகும்.

$$\therefore \quad P\{A_2/A_1\} = \frac{P\{A_1 A_2\}}{P\{A_1\}}$$

$$\therefore \quad P\{A_1 A_2\} = P\{A_1\} \cdot P\{A_2/A_1\}$$

இதுபோலவே

$P\{A_1 A_2\} = P\{A_2\} \cdot P\{A_1/A_2\}$

எனவும் நிறுவலாம்.

கிளைத்தேற்றங்கள்

1. $P\{AB \mid C\} = P\{A \mid C\} P\{B \mid AC\}$.

2. $P\{ABC\} = P\{A\} \cdot P\{B \mid AC\} \cdot P\{C \mid AB\}$.

ஏனெனில், $P\{ABC\} = P\{A(BC)\}$

$$= P\{A\} \cdot P\{(BC) \mid A\}$$

$$= P\{A\} P\{B \mid AC\} P\{C \mid AB\}$$

3. $P(A_1 A_2 \dots A_n) = P\{A_1\} P\{A_2 \mid A_1\} \cdot P\{A_3 \mid A_1 A_2\} \dots P\{A_n / A_1 A_2 \dots A_n\}$

4. A_1, A_2 ஆகிய இரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்று நிகழ்வதைப் பிறிதொன்று பாதிக்காத விடுபட்ட நிகழ்ச்சிகளாக (Independent Events) அமையுமானால்,

$$P\{A_2 \mid A_1\} = P(A_2) \text{ ஆகும்.}$$

$$P\{A_1 \mid A_2\} = P(A_1) \text{ ஆகும்.}$$

எனவே A_1, A_2 என்பன சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளாக அமையுமானால்,

$$P\{A_1 A_2\} = P\{A_1\} \cdot P\{A_2\}$$

குறிப்பு : $P\{A_1 A_2\} = P\{A_1\}\{A_2\}$ என அமையுமானால் A_1, A_2 என்பன இரு சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளாகக் கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள்

1. A-ம் B-ம் ஒவ்வொருவராக இரண்டு பகடைகளை வீசுகின்றனர். 9ஐ முதலில் வீசுபவர் வெற்றி பெற்றவராவார். முதன் முதலில் A வீசுகிறார். A, B ஆகியவர்களின் வெற்றித்தகவுகளைக் காண்க.

9ஐப் பெற 3, 6; 4, 5; 5, 4; 6, 3 என்ற வழிகளில் இரு பகடைகளை வீசலாம். எனவே 9ஐப் பெறுவதற்குரிய வாய்ப்பு $= \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ ஆகும். அதாவது வெற்றிவாய்ப்பு $= \frac{1}{9}$; தோல்வி வாய்ப்பு $= \frac{8}{9}$.

முதலில் Aஐக் கவனிப்போம்.

A வெற்றி பெற 1, 3, 5.........என்பன போன்ற வீச்சு வரிசை எண்ணிக்கையில் 9 ஐ வீசவேண்டும்.

1ஆவது வீச்சில் வெற்றி வாய்ப்பு $= \frac{1}{9}$

3ஆவது வீச்சில் வெற்றி வாய்ப்பு = முதல் தடவையில் A தோல்வியும், 2ஆம் தடவையில் B தோல்வியும், 3ஆம் தடவையில் A வெற்றி பெறுவதற்குரிய வாய்ப்புமாகும்.

$$= \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{9} = \left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot \frac{1}{9}$$

5ஆவது வீச்சில் வெற்றி வாய்ப்பு $= \left(\frac{8}{9}\right)^4 \cdot \frac{1}{9}$

....

....

....

என்பன போன்று பிற.

$$\therefore P_A = \frac{1}{9} + \left(\frac{8}{9}\right)^2 \frac{1}{9} + \left(\frac{8}{9}\right)^4 \frac{1}{9} + \dots\dots$$

$$= \frac{1}{9}\left\{1+\left(\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{8}{9}\right)^4+\cdots\cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{8}{9}\right)^2}=\frac{1}{9}\times\frac{9^2}{17}=\frac{9}{17}$$

$$P^B = 1 - P_A = 1 - \frac{9}{17} = \frac{8}{17}$$ ஆகும்.

P_B -ஐ P_A -ஐப் போன்று தனியாகவும் காணலாம்.

2. n கடிதங்களும், அவற்றுக்குரிய முகவரியுடன் கூடிய n உறைகளும் உள்ளன. ஒருவர் ராண்டமாக ஒவ்வொரு கடிதத்தினையும் ஒவ்வோர் உறைக்குள் போடுகிறுர். எனில், (i) ஒரு கடிதம் அதற்குரிய உறையில் வைக்கப்படாத நிலைக்குரிய வாய்ப்பைக் காண்க. (ii) r கடிதங்கள் மட்டும் அவற்றுக்குரிய சரியான உறைகளில் வைக்கப்படுவதற்குரிய வாய்ப்பென்ன?

எல்லாக் கடிதங்களும் தவருன உறைகளில் புகுவதற்குரிய வழிகளின் எண்ணிக்கை t_n என்க· முதலில் இரு கடிதங்களைக் கவனிப்போம். இவையிரண்டும் ஒன்று மற்றென்றுக்குரிய உறையினுள் புகுந்துகொண்டால், எஞ்சிய $(n-2)$ கடிதங்களும் தவருன உறைகளில் புகுவதற்கு வழிகளின் எண்ணிக்கை t_{n-2} ஆகும். இரு கடிதங்கள் ஒன்றுக்கொன்று மாருன உறையுள் புக $(n-1)$ வழிகள் உள்ளன. ஒரு கடிதம் மற்றென்றின் உறைக்குள் புகுந்து, அந்த மற்றென்று இக் கடிதத்தின் உறைக்குள் புகாமலிருக்குமாறு $(n-1)$ வழிகளில் நிகழலாம். எனில், எஞ்சியவை t_{n-1} வழிகளில் தவருன உறையினுள் புகும்.

$$\therefore \quad t_n = (n-1)\,(t_{n-1} + t_{n-2})$$

$$\therefore \quad t_{n-1} - n\,t_n = -\,[\,t_{n-1} - (n-1)\,t_{n-2}\,]$$

$$+\,[\,t_{n-2} - (n-2)\,t_{n-3}\,]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(-1)^{n-2}\,[\,t_2 - 2\,t_1\,]$$

ஆனல் $t_1 = 0 \quad t_2 = 1$.

$$\therefore \quad t_n - n t_{n-1} = (-1)^n$$

$$\therefore \frac{t_n}{n!} - \frac{t_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

$n = 2$, எனில் $\frac{t_2}{2!} - \frac{t_1}{1!} = \frac{1}{2!}$

$n = 3$,, $\frac{t_3}{3!} - \frac{t_2}{2!} = \frac{1}{3!}$

$n = 4$,, $\frac{t_4}{4!} - \frac{t_3}{3!} = \frac{1}{4!}$

... ...

... ...

... ...

$n = n$,, $\frac{t_n}{n!} - \frac{t_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{n!}$

கூட்டுக.

$$\frac{t_n}{n!} - \frac{t_1}{!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$\therefore t_n = n! \left\{ \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right\}$$

(i) வேண்டிய நிகழ்தகவு $= \frac{t_n}{n!}$

$$= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{n!} (1-e^{-1})$$

(ii) r கடிதங்கள் nC_r வழியிலும் எஞ்சியவை t_{n-r} வழிகளிலும் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

$\therefore$ வேண்டிய நிகழ்தகவு $= \frac{nC_r \; t_{n-r}}{n!}$

$$= \frac{1}{r!} \quad \frac{t_{n-r}}{(n-r)!}$$

$$= \frac{1}{r!} \left\{ \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-r}}{(n-r)!} \right\}$$

3. ஒரு பிரிட்ஜ் சீட்டு ஆட்டத்தில் 4 ஆட்டக்காரர்களில் குறைந்தது ஒருவராவது ஒரே சூட்டினைச் சார்ந்த 13 சீட்டுகளைப் பெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவு காண்க.

13 சீட்டுகளையும் ஒரே சூட்டில் முதல் ஆட்டக்காரர் பெறும் நிகழ்ச்சியை A என்க. இது போன்றே மற்றைய மூவரும் பெறும் நிகழ்ச்சிகளை B, C, D என்க.

இந்த நான்கில் ஏதாவது ஒருவர் வெற்றி பெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவு $P(A+B+C+D)$ ஆகும்.

தற்போது $P(A) = \frac{4}{{}_{52}C_{13}}$

$$P(AB) = \frac{4}{{}_{52}C_{13}} \cdot \frac{3}{{}_{39}C_{13}}$$

$$P(ABC) = \frac{4}{{}_{52}C_{13}} \; \frac{3}{{}_{39}C_{13}} \; \frac{2}{{}_{26}C_{13}}$$

$$P(ABCD) = \frac{4}{{}_{52}C_{13}} \cdot \frac{3}{{}_{39}C_{13}} \cdot \frac{2}{{}_{26}C_{13}} \cdot \frac{1}{{}_{13}C_{13}}$$

தற்போது

$$P(ABCD) = \Sigma P(A) - \Sigma P(AB) + \Sigma P(ABC) - P(ABCD)$$

ஆனால் $P(A) = P(B) = P(C) = P(D)$

$$P(AB) = P(BC) = P(CD) = P(DA) = P(AC) = P(BD)$$

$$P(ABC) = P(ABD) = P(BCD) = P(ACD)$$

$$\therefore \quad P(ABCD) = 4P(A) - 6P(AB) + 4P(ABC) - P(ABCD)$$

$$= 4 \cdot \frac{4}{{}_{52}C_{13}} - 6 \cdot \frac{4}{{}_{52}C_{13}} \times \frac{3}{{}_{39}C_{\cdot}} +$$

$$4.\quad \frac{4}{{}_{52}C_{13}} \cdot \frac{3}{{}_{39}C_{13}} \cdot \frac{2}{{}_{26}C_{13}} -$$

$$\frac{4}{{}_{52}C_{13}} \cdot \frac{3}{{}_{39}C_{13}} \cdot \frac{2}{{}_{26}C_{13}} \cdot \frac{1}{{}_{13}C_{13}}$$

இதனைச் சுருக்கி விடையைப் பெறலாம்.

4. n சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகளின் தனித்தனி நிகழ்தகவு p_i, $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$ ஆகும். இவற்றில் குறைந்தது ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்குரிய வாய்ப்பினைக் காண்க.

முதல் நிகழ்ச்சி நிகழாமைக்குரிய வாய்ப்பு $= 1 - p_1$

2ஆம் ,, ,, ,, $= 1 - p_2$

....

....

....

n ஆம் ,, ,, ,, $= 1 - p_n$.

எனவே, ஒரு நிகழ்ச்சிகூட நிகழாமைக்குரிய தகவு

$$= (1 - p_1)(1 - p_2) \ldots (1 - p_n)$$

இந் நிகழ்ச்சிகள் எல்லாம் நிகழாமல் இருக்கவேண்டும்; அல்லது ஒன்றுவது நிகழ வேண்டும். எனவே, இவை இரண்டுக்கும் உரிய நிகழ்தகவுகளின் கூடுதல் 1 ஆகும்.

∴ ஒன்றுவது நிகழ்வதற்குரிய வாய்ப்பு

$$= 1 - \{(1 - p_1)(1 - p_2) \ldots\ldots (1 - p_n)$$

பேயஸ் தேற்றம் (Bayes Theorem)

$P(A_i) = 0$ என்பதற்கேற்ப $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ என்பன ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சிகளானுல், B என்ற ஏதாவதொரு ராண்டம் நிகழ்ச்சிக்கு

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

நிறுவுதல்

$A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ என்பன ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சிகளாதலால், நிகழ்ச்சி B இவைகளில் ஒன்றுடன் மட்டுமே சேர்ந்து நிகழும்.

எனவே,

$$B = A_1 B \cup A_2 B \cup \ldots\ldots \cup A_n B$$

$$P(B) = P(A_1 B) + P(A_2 B) + \ldots + P(A_n B)$$

ஆனால் $P(A_i B) = P(A_i) \cdot P(B/A_i)$

$$\therefore \quad P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_j)\, P(B/A_i)$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்குகள்

ஒரு கலத்தினில் 2 நீலப் பந்துகளும் 3 சிவப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. இரண்டாவது கலத்தினில் 3 நீலப்பந்துகளும், 2 சிவப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. மூன்ருவது கலத்தினில் 4 நீலப் பந்துகளும், 1 சிவப்புப் பந்தும் உள்ளன. கலத்தினைத் தேர்ந்தெடுக்க, அவை சமவாய்ப்புடையன. ஏதாவது ஒரு கலத்தினில் ஒரு நீலப் பந்தாக எடுப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது?

A_1 என்பது முதல் கலம் தேர்ந்தெடுப்பதற்கு நிகழ்தகவு,

A_2 ,, 2ஆவது ,, ,, ,,

A_3 ,, 3ஆவது ,, ,, ,,

எனக் கொள்க.

நீலநிறப் பந்து எடுக்கும் நிகழ்ச்சியை B என்க.

இங்கு $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$

$$P(B/A_1) = 2/5$$

$$P(B/A_2) = 3/5; \qquad P(B/A_3) = \frac{4}{5}$$

$$P(B) = P(A_1)\, P(B/A_1) + P(A_2)\, P(B/A_2) + P(A_3)\, P(B/A_3)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5}$$

$$= \frac{3}{5}.$$

2. மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணக்கில் ஒரு நீலப் பந்து எடுக்கப்படுகிறது. அது முதல் கலத்திலிருந்து எடுக்கப்பட்ட நீலப் பந்தாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவினைக் காண்க.

$P(A_1/B)$ காண வேண்டும்.

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A/B)$$

$A = A_1$ எனக் கொண்டால்

$$P(A_1 B) = P(B) \cdot P(A_1/B)$$

$$\therefore \quad P(A_1/B) = P(A_1 B)/P(B)$$

$$= \frac{P(A_1) \cdot P(B/A_1)}{P(A_1) P(B/A_1) + P(A_2) P(B/A_2) + P(A_3) \cdot P(B/A_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{9}$$

பயிற்சி

1. A_1, A_2 என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளோடு இணைந்த கீழ்க் கண்ட நிகழ் தகவுகளின் மதிப்புகளை ஏறுவரிசையில் எழுதுக.

$$P(A_1);\ P(A_1 A_2);\ P(A_1 + A_2);\ P(A_1) + P(A_2)$$

2. ஒரு சீட்டுக் கட்டிலிருந்து 6 சீட்டுகள் ஒவ்வொன்றாக எடுக்கப்படுகின்றன. எடுத்த ஒரு சீட்டு மீண்டும் கட்டோடு சேர்க்கப்பட்டு, பின் சீட்டுக்கட்டு நன்கு கலைக்கப்பெற்று அடுத்த சீட்டு எடுக்கப்படுகிறது. அந்த 6 சீட்டுகளில் 4 விட கூட்டினைச் சேர்ந்த ஒவ்வொரு சேர்க்கையும் குறைந்தது ஒரு தடவையாவது அமைவதற்குரிய நிகழ் தகவு யாது?

3. புள்ளியியலில் ஒரு கணக்குத் தரப்படுகிறது. அதனை விடுவிக்க மூன்று மாணவர்களுக்குரிய நிகழ் தகவுகள் $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ஆகும். எனில், கணக்குத் தீர்க்கப்படுவதற்குரிய நிகழ் தகவு யாது?

4. ஒரு வழக்கினில் A, B என்ற இருவர் சார்பற்ற சாட்சி களாவர். A உண்மை உரைப்பதற்குரிய நிகழ் தகவு x ஆகும். Bயின் நிகழ்தகவு y ஆகும். ஒரு வழக்கினில் இருவரும் ஒரே மாதிரி கூறுகின்றனர். இணைந்த இக் கூற்று மெய்யென்பதற்குரிய நிகழ் தகவு $\frac{xy}{1-x-y+2xy}$ எனக் காட்டுக.

5. முதல் கலத்தில் 1 வெள்ளைப் பந்தும், 2 சிவப்புப் பந்து களும், 3 கருப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. இரண்டாவது கலத் தினில் 2 வெள்ளைப் பந்துகளும், 3 சிவப்புப் பந்துகளும், 1 கருப்புப் பந்தும் உள்ளன. மூன்றுவது கலத்தினில் 3 வெள்ளைப் பந்து களும், 1 சிவப்புப் பந்தும், 2 கருப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. ஏதாவது ஒரு கலத்தினை எடுத்து, அதிலிருந்து இரு பந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன. அவை ஒன்று சிவப்பாகவும், பிறிதொன்று வெள்ளையாகவும் அமைவதற்குரிய நிகழ் தகவு யாது? அவை யிரண்டும் இரண்டாவது கலத்திலிருந்து எடுக்கப்பட்டனவாகவும் அமைவதற்குரிய நிகழ் தகவு யாது?

6. ஒரு கலத்தில் 3 வெள்ளைப் பந்துகளும், 5 கருப்புப் பந்து களும் உள்ளன. அவைகளிலிருந்து 4 பந்துகள் வேறொரு கலத்திற்கு மாற்றப்படுகின்றன. இப் புதிய கலத்திலிருந்து இரு பந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன. அவையிரண்டும் வெள்ளையாகக் காணப்பட்டன. இக் கலத்திலிருந்து 3 பந்துகள் எடுக்கப்பட்டால் அவைகள் வெள்ளையாக அமைவதற்குரிய நிகழ் தகவு யாது?

7. A, B, C என்ற சம திறமையுடைய மூன்று இயந்திரங்கள் துப்பாக்கிக் குண்டுகளை உற்பத்தி செய்கின்றன. அவை தவருன அளவுடைய துப்பாக்கிக் குண்டுகளை உற்பத்தி பண்ணுவதற்குரிய நிகழ் தகவுகள் முறையே $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ ஆகும். ஒரு நாள் உற்பத் தியில் ராண்டமாக ஒரு துப்பாக்கிக் குண்டு எடுத்து பரிசோதிக் கப்பபடுகிறது. அது தவருன அளவுடையதாக உள்ளது. அது A என்றும் இயந்திரத்தினல் உற்பத்திப் பண்ணப்பட்டதாக அமைவதற்குரிய நிகழ் தகவினைக் காண்க.

8. $P(A \mid A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A)+P(B)}$ எனக்காட்டுக.

இங்கு $P(A \cup B) \neq 0$. Aயும் Bயும் ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சிகள்.

$$P(A_1 + A_2 + \cdots\cdots + A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

இங்கு A_i என்பன ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் நிகழ்ச்சி களாக அமைந்தால், சம உறவு பொருந்தும். இதனை நிறுவுக.

9. நான்கு மனிதர்கள் A, B, C, D என அழைக்கப் படுகின்றனர். அவர்கள் சரியாக அமர்வதற்குரிய நாற்காலிகளும் முறையே A, B, C, D எனக்குறிக்கப்படுகின்றன. எந்தவொரு மனிதரும், அவருக்குரிய சரியான நாற்காலியில் அமராமலிருப்பதற் குரிய நிகழ்தகவு காண்க.

10. ஒருவர் ஐந்து கடிதங்களையும், ஐந்து உறைகளின் மீது அவற்றுக்குரிய முகவரிகளையும் எழுதுகிறார். முகவரி எழுதப்பட்ட பக்கம் கவிழ்த்தப்பட்டு, கடிதங்கள் உறைக்குள் புகுத்தப் படுகின்றன. எக்கடிதமும் அதற்குரிய சரியான உறைக்குள் வைக்கப்படாமலிருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவைக் காண்க.

ஒரு புள்ளியியல் மாறியின் எதிர்பார்த்தல் :

ஒரு புள்ளியியல் மாறியின் எதிர்பார்த்தல் (Expectation of a variate) என்றால் என்ன வென்பதை இங்குக் காண்போம். x என்பது ஒரு தொடர்பற்ற புள்ளியியல் மாறியென்க. அது பெறத்தக்க மதிப்புகள் ஒன்றையொன்று புறக்கணிக்கும் தன்மையில் அமைந்த x_i $(i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n)$ ஆகும். எனில் x-ன் கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல்

$$E(x) = \Sigma P_i\, x_i \text{ என்பது வரையிலக்கணமாகும்.}$$

x என்பது ஒரு தொடர்ந்த புள்ளியியல் மாறியானால், அதன் கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல்

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, \phi(x) \cdot dx \text{ ஆகும்;}$$

இங்கு $\phi(x)$ என்பது நிகழ்தகவு அடர்த்திக் கோவை அல்லது அலைவெண் கோவையாகும்.

குறிப்பு : $\bar{x} = E(x)$; $\sigma^2 = E(x - \bar{x})$ என்பது தெளிவாகும்.

கூட்டுத்தேற்றம் :

புள்ளியியல் மாறிகளின் கூடுதலுக்குரிய கணக்கியல் எதிர் பார்த்தல், அம்மாறிகளின் கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல்களின் கூடுதலுக்குச் சமமாகும்.

நிறுவுதல் :

முதலில், x, y என்ற இரு மாறிகளைக் கவனிப்போம்.

x எடுத்துக் கொண்ட மதிப்பு x_i, $i = 1, 2, \ldots\ldots m$ என்க.

y ,, ,, ,, y_j, $j = 1, 2, \ldots\ldots n$,,

எனவே $(x + y)$ என்ற மாறியானது $x_i + y_j$ என்ற mn மதிப்புகளைப் பெறும்.

x_i என்பதற்குரிய நிகழ்தகவு p_i யெனவும்

y_j ,, ,, ,, p_j ,,

$x_i + y_j$,, ,, ,, p_{ij} ,, கொள்க.

$$E(x + y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (x_i + y_j)\, p_{ij}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i\, p_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} y_j\, p_{ij}$$

$$= \sum_{i} xi \left(\sum_{j} p_{ij}\right) + \sum_{j} y_i \left(\sum p_{ij}\right)$$

$$= \sum_{i} x_i\, p_i + \sum_{j} y_i\, p_i$$

$$= E(x_i) + E(y_j)$$

இதனை n மாறிகளுக்கு நீட்டினால் நாம் பெறுவது

$$E(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = E(x_1) + E(x_2) + \ldots E(x_n)$$

இதுபோன்றே தொடர் மாறிகளுக்கும் நிறுவலாம்.

பெருக்கல் தேற்றம் :

புள்ளியியல் மாறிகளின் பெருக்கற் பலனுக்குரிய கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல், அம்மாறிகளது எதிர்பார்த்தல்களின் பெருக்கலுக்குச் சமம்.

கூட்டுத் தேற்றத்தினில் கையாண்ட குறியீடுகளையே கொண்டால்,

$$E(xy) = \sum_j \sum_i x_i\, y_j\, p_i\, p_j$$

$$= \sum_j \sum_i (x_i\, p_i)(y_j\, p_j)$$

$$= \sum_i x_i\, p_i \sum_j y_j\, p_j$$

$$= \sum_i x_i\, p_i\, E(y)$$

$$= E(y) \sum_i x_i\, p_i$$

$$= E(y)\, E(x) = E(x)\, E(y)$$

இதனையே n மாறிகளுக்கு நீட்டினால் நாம் பெறுவது,

$E(x_1\, x_2 \ldots x_n) = E(x_1)\, E(x_2) \ldots E(x_n)$

இவ்வாறே, தொடர்ந்த மாறிகளுக்கும் நிறுவலாம்.

பயிற்சி

1. ஒரு போட்டியில் பரிசுத்தொகை ரூ. 11 ஆகும். பகடை வீச்சில் அறுமுகப்பகடையை வீசுவது வெற்றியென்பது போட்டியாகும். முதன்முதலாக A யும், பின்பு B யுமாக வீசுகின்றனர். ஒவ்வொருவரின் எதிர்பார்த்தலைக் கணக்கிடுக.

2. சார்பற்ற சோதனைகள் தொடர்ந்து நிகழ்த்தப் படுகின்றன. முதல் வெற்றிக்கு முன்பாக ஏற்படும் தோல்விகளின் எதிர்பார்த்தல் $\dfrac{1-p}{p}$ என நிறுவுக. இங்கு p என்பது முதல் சோதனையில் வெற்றிக்குரிய நிகழ்தகவாகும்.

3. ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து ஒருவன் ஒன்றன்பின் ஒன்றாகச் சீட்டுக்களை எடுக்கிறார். இவ்வாறு எல்லா ஏஸுகளையும் பெறும் வரை எடுக்கிறார். எனில் எத்தனை சீட்டுக்கள் அவர் எடுக்க வேண்டியிருக்குமென எதிர்பார்க்கப்படுகிறது ?

4. A, B, C, D என்ற நால்வர் வரிசையாக ஒரு சீட்டுக் கட்டினை வெட்டி வெட்டிவைக்கின்றனர், முதன் முதலாக

ஸ்பேடினை வெட்டிவைப்பவர் பரிசுத்தொகையாகிய ரூ. 175 ஐப் பெறுகிறார். அந்த நால்வர் கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல்களைக் காண்க.

5. X என்பதன் அடர்த்திக் கோவை $f(x)$ கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுக்கப்படுகிறது. எனில் $E(X)$ யைக் காண்க.

$$f(x) = \begin{cases} x < 0 \text{ ல் } & 0 \\ 0 \leq x < 1 \text{ ல் } & x \\ 1 \leq x < 3 \text{ ல் } & \frac{3-x}{4} \\ x \leq 3 \text{ ல் } & 0 \end{cases}$$

ராண்டம் மாறி

ராண்டம் சோதனை, ராண்டம் மாறி என்பவை என்ன வென்பதை முன்பே கண்டோம். முடிவுகளை முன்னதாகவே தீர்மானிக்க இயலாச் சோதனைக்கு ராண்டம் சோதனையெனவும், அதன் விளைவிற்கு (outcome) ராண்டம் மாறியெனவும் கண்டோம். மேலும் தொடர்பற்ற மாறி, தொடர் மாறி என்ற இருவகையினைப் பற்றியும் முன்னர் கண்டோம். x என்றமாறி x_j, $i = 1, 2, \dots n$ என்ற மதிப்புகளைப் பெறுவதாகக் கொள்வோம்; x_i களின் நிகழ்தகவுகள் p_i என்க. எனில் p_i என்ற நிகழ்தகவுகளோடு கூடிய x_i களின் குழுவினை, ஒற்றைமாறி நிகழ்தகவுப் பரவல் (univariate probability distribution) எனஅழைக்கப்படும். இங்கு x_i என்பன தொடர்பற்ற மதிப்புகளாகையால், இதனை தொடர்பற்ற நிகழ்தகவுப் பரவல் எனவும் அழைக்கின்றோம். இது ஒரு அலைவுப்பர்வலைப் போன்றதேயாகும். எனவே இதன் இயல்பு களும் அலைவுப் பரவலின் இயல்புகளை ஒத்தவை என்பது இங்கு குறிப்பிடத்தக்கது. இதன் அமைப்பு வருமாறு :

$$x_i : \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots\dots\dots\dots \quad x_n$$

$$p_i : \quad p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad \dots\dots\dots\dots \quad p_n$$

பரவல் கோவை

ζ என்பது ஒரு ராண்டம் மாறி என்க. நேர்கோடு R-ல் $S = (-\infty < \zeta \leq x)$ என்பது ஒரு கணம் என்க.

$$\therefore \quad P(S) = P[\zeta \in S : (-\infty < \zeta \leq x)]$$

$P(S)$-ன் மதிப்பு x-ன் மதிப்பினைப் பொருத்ததாகும். இது x-ல் ஒரு கோவையாகும். அதனை $F(x)$ எனக்குறிப்பிடுவோம்.

$$\text{எனவே } F(x) = P(\zeta \leq x)$$

இந்த $F(x)$ ற்குப் பரவல் கோவை (Distribution function) அல்லது குவிவு பரவல் கோவை (Cumulative distribution function) எனப் பெயராகும்.

x-ன் மதிப்பு மிகமிக $F(x)$-ன் மதிப்பும் மிகுபடும். ஒற்றை அளவு தளத்தினில் R-ல் உள்ள ஒவ்வொரு கணம் S-ற்கும், அதன் நிகழ்தகவாக $P(S)$ பெறமுடியும். R-ன் முழுதளத்திற்கும் நிகழ் தகவு $P(R) = 1$ என்பது தெளிவாகும். எனவே ஒரு மூல அளவை (unit) கனப்பொருள் (mass) R-ன் முழுவதற்கும் பரவியிருப்பதே நிகழ்தகவுப் பரவலெனக் கருதலாம்.

$F(+\infty) = P(R) = 1$. $F(-\infty) = P(\phi) = 0$ என்பது தெளிவாகும். இங்கு ϕ வெற்றுக்கணம் $F(x)$ என்பது x-ற்கு இடது பக்கத்தில் கனப்பொருள் பரவியுள்ள தன்மையைத் தீர்மானிக்கிறது.

x-என்பது ஒரு தொடர்பற்ற ராண்டம் மாறி என்க. அதன் நிகழ்தகவுக் கோவை $f(x)$ கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

x :	0	1	2	3	4
$f(x)$:	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$

$f(x) = 0$ (ஏதோ வேறொரு மதிப்பில்)

மேலே கண்ட பட்டியலிலிருந்து குவிவு நிகழ் தகவுகளைக் காணலாம்.

$$F(0) = P(x \le 0) = \frac{1}{8}$$

$$F(1) = P(x \le 1) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$$

$$F(2) = P(x \le 2) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{6}{8}$$

$$F(3) = P(x \le 3) = \frac{6}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$F(4) - P(x \le 4) = \frac{7}{8} + \frac{1}{8} = 1.$$

எனவே குவிவுப் பரவல் கீழ்க்கண்டவாறு தரப்படுகிறது.

x :	0	1	2	3	4
$F(x)$:	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	1

இதனை வரைப்படத்தில் அமைத்து மாணவர் காணவும்.

ஒரு தொடர் ராண்டம் மாறியின் பரவல் கோவைக்குரிய $y = F(x)$ வரைப்படம் ஒரு வளைகோடாக அமையும். இந்த வளைகோடு மிக மெல்லியதாக அமையும். மீப்பெரும் y தூரம் ஒன்றுகவும் மீச்சிறு y தூரம் 0 ஆகவும் அமையும். ராண்டம் மாறி x-ன் நிகழ் தகவு கோவைக்கேற்ப இதன் வடிவம் அமையும். இது கீழ்க்கண்ட இயல்புகளை பெற்றிருக்கும்.

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $F(-\infty) = 0$
3. $F(+\infty) = 1$
4. $F(x)$ என்பது ஒரு வளர்ந்து செல்கிற நேர்மையற்ற கோவையாகும்.
5. வலப்புறத்தில் தொடர் கோவையாக அமையும்.

அடர்த்திக்கோவை

மேலே கண்ட இயல்புடைய $F(x)$ என்பது ஓர் தொடர் கோவையாக அமைந்து, $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ என்பது ஏறத்தாழ R-ல் எல்லாவிடத்திலும் நிலைத்திருக்குமானுல், $f(x)$ என்பது x-ன் அடர்த்திக்கோவை (Density function) அல்லது நிகழ்தகவுக் கோவை (Probability function) என வரையிலக்கணம் வகுக்கப் படுகிறது.

தற்போது

$f(u)\, du$-யை $P(u \leq \zeta \leq u + \delta u)$ என எழுதலாம்.

$$\therefore \sum_{u \leq x} f(u)\, du = P[\zeta \leq x]$$

$$(\text{அ-து}) \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, du = P[\zeta \leq x]$$
$$= f(x)$$

எனவே அடர்த்திக் கோவையினைத் தொகையீடு செய்து பரவல் கோவையினைப் பெறலாம்.

$y = f(x)$ என்பது அலைவெண் வளைவுகோடு அல்லது நிகழ் தகவு அடர்த்தி வளைகோடு என்றும் $y = F(x)$ என்பது பரவல் வளைவு கோடெனவும் அழைக்கப்படுகின்றன.

அடர்த்திக் கோவையின் இயல்புகள்

ζ என்பது ஓர் தொடர் ராண்டம் மாறி ஆக இருக்குமாயின்,

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot dx = 1$

2. $\int_{a}^{b} f(x)\, dx$ என்பது $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ என்பன வற்றுக்கிடையேயுள்ள பரப்பாகும்.

3. $P(x_0 \leq x \leq \infty) = \int_{x_0}^{\infty} f(x)\cdot dx$

4. $P\{x_0 < |x|\} = \int_{-\infty}^{-x_0} f(x)\cdot dx + \int_{x_0}^{\infty} f(x)\cdot dx$

ζ என்பது ஒரு தொடர்பற்ற ராண்டம் மாறியாக அமையுமாயின்,

1. $\sum_{-\infty \leq x \leq \infty} f(x) = 1$

2. $P\{x_0 \leq x \leq \infty\} = \sum_{x_0 \leq x \leq \infty} f(x)$

3. $P\{x_0 \, |x|\} = \sum_{-\infty \leq x < -x_0} f(x) + \sum_{x_0 < x \leq \infty} f(x)$

ஒரு கோவை ஒரு ராண்டம் மாறியின் அடர்த்திக் கோவை யெனக் காண, கீழ்க்கண்ட இயல்புகளை அது பெற்றிருக்க வேண்டும்:

1. x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $f(x) \geq 0$

2. $\sum_{-\infty \leq x \leq \infty} f(x) = 1$ அல்லது $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot dx = 1$

எடுத்துக் காட்டுக் கணக்கு

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{3-x}{4}, & 1 < x \leq 3 \\ 0, & x\text{-ன் பிற மதிப்புகளில்} \end{cases}$$

இந்த $f(x)$ ஓர் அடர்த்திக் கோவையாகுமா யென்பதை ஆய்க. அதனுடன் பொருந்திய பரவல் கோவையினைக் காண்க.

(i) x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $f(x) \geq 0$ என்பது தெளிவாகும்.

(ii) தற்போது,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{1} x\, dx + \int_{1}^{3} \frac{3-x}{4} \cdot dx + \int_{3}^{\infty} 0 \cdot dx$$

$$= 0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{3x}{4} - \frac{x^2}{8}\right]_1^3 + 0$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{9}{4} - \frac{9}{8}\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8}\right) = 1$$

எனவே $f(x)$ என்பது ஒரு அடர்த்திக் கோவையாகும்.

(iii) தற்போது $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) \cdot dx$

$$-\infty < x \leq 0\text{-ல்} \quad F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx = 0$$

$$0 < x \leq 1\text{-ல்} \quad F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{x} x \cdot dx = \frac{x^2}{2}$$

$$1 < x \leq 3\text{-ல்} \quad F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{1} x\, dx + \int_{1}^{x} \frac{3-x}{4} \cdot dx$$

$$= 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_{1}^{x}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left[\left(3x - \frac{x^2}{2}\right) - \left(3 - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(3x - \frac{x^2}{2}\right) - \frac{5}{8}$$

$$= -\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\left(3x - \frac{x^2}{2}\right)$$

$3 \leq x < \infty$-ல்,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{1} x\, dx + \int_{1}^{3} \frac{3-x}{4} \cdot dx + \int_{0}^{x} 0 \cdot dx$$

$$= 1.$$

எனவே

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq 0 \\ \frac{x^2}{2}, & 0 < x \leq 1 \\ -\frac{1}{8} + \left(3x - \frac{x^2}{2}\right), & 1 < x \leq 3 \\ 1, & 3 \leq x < \infty. \end{cases}$$

பயிற்சி

1. கீழ்க்கண்டவை அடர்த்திக் கோவைகள் தானு என்பதை ஆய்க. அவ்வாறிருப்பின் அவையோடு பொருந்திய பரவல் கோவைகளைக் காண்க.

(i) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x = 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 2 \\ 0, & \text{பிற } x\text{-ல்} \end{cases}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x = -1 \\ \frac{1}{3}, & x = 0 \\ \frac{1}{3}, & x = 5 \\ 0 & \text{வேறு } x\text{-ல்} \end{cases}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{வேறு } x\text{-ல்} \end{cases}$

2. $f(x, \theta) = \theta e^{-\theta x}$ என்பது $0 < x < \infty$ என்ற இடைவெளியிலும், வேறு x-ல் $f(x, \theta) = 0$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளன. θ என்பது $\theta > 0$ என்றவாறும், ஒரு நிலை உறுப்பாகவும் தரப் பட்டுள்ளது. எனில் $f(x, \theta)$ என்பது ஒரு அடர்த்திக் கோவையாக அமையுமென நிறுவுக.

3. ஒரு பரவல் கோவை $F(x)$ கீழ்க்கண்டவாறு தரப்பட்டுள்ளது.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2x^2}{5}, & 0 < x \leq 1 \\ -\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(3x - \frac{x^2}{2}\right), & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

இதற்குரிய அடர்த்திக் கோவை $f(x)$-ஐக் காண்க. $f(x)$, $F(x)$-க்குரிய வரைபடங்கள் வரைக.

4.
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & x = -2 \\ \frac{2}{8}, & x = -1 \\ 3/8, & x = 0 \\ 2/8, & x = 2 \\ 0, & \text{வேறு } x\text{-ல்} \end{cases}$$

எனில் (1) $F(x)$ (2) $F(0) - F(-1)$ (3) $P\{x \geq 0\}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

ஏாண்டம் மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள்

x என்ற ஒரு தொடர்பற்ற மாறிக்கு, A-யோடு பொருந்திய k-ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை $\frac{1}{N}\sum f_i (x_i - A)^k$

என்றும், x என்ற தொடர்மாறிக்கு, அது $\frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} f_i (x_i - \bar{x})^k dx$

என்றும் முன்னர் கண்டோம். இங்கு f_i என்பது அலைவெண்ணாகும்.

இதனை, எதிர்பார்த்தல் குறியீடுகளில் அமைத்தால், A-யோடு பொருந்திய k-ஆவது விலக்கப் பெருக்குத் தொகை $E\left\{(x-A)^k\right\}$.

இங்கு $f(x)$ என்பது ஒரு அடர்த்திக்கோவையாகும்.

எனவே,
$$\mu'_r = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot (x - A)^r \, dx.$$
இங்கு $f(x)$ ஒரு அடர்த்திக் கோவை
$$= E\left\{(x - A)^r\right\}$$

இதுபோலவே $\mu_r = E\left\{(x - \bar{x})^r\right\}$

தேற்றம்

$$\bar{x} = E(x)$$

நிறுவுதல்

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = \bar{x}.$$

தேற்றம்

$$\mu_2 = E(x^2) - \bar{x}^2$$

நிறுவுதல்

$$\begin{aligned}\mu_2 &= E\{(x - \bar{x})^2\}\\ &= E\{\bar{x}^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2\}\\ &= E(x^2) - 2\bar{x}\,E(x) + E(\bar{x}^2)\\ &= E(x^2) - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2\\ &= E(x^2) - \bar{x}^2\end{aligned}$$

தேற்றம்

$(ax + b)$-யின் பரவற்படி $= a^2$, x-ன் பரவற்படி

நிறுவுதல்:

x-ன் பரவற்படி $= u_2 = E\{(x - \bar{x}^2)\}$

$(ax + b)$-யின் பரவற்படி $= E[\{(ax + b) - \bar{x}\}^2]$

$\{\bar{x} = ax + b$-யின் கூட்டுச் சராசரி $\}$

$$\begin{aligned}&= E\{[(ax + b) - aE(x) - b]^2\}\\ &= E\{a^2[x - E(x)]^2\}\\ &= a^2 E\{[x - E(x)]^2\}\\ &= a^2 E\{(x - \bar{x})^2\}\end{aligned}$$

$= a^2 .\ x$-ன் பரவற்படி.

பல புள்ளியியல் மாறிகளின் பரவல்

ஒரே மாறிக்குரிய நிகழ்தகவுப் பரவலைச் சென்ற அத்தியாயத்தில் கண்டோம். தற்போது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளின் நிகழ்தகவுப் பரவலைக் காண்போம். இவற்றிலும், தொடர் பரவல், தொடர்பற்ற பரவலென, தொடர் மாறிகள், தொடர்பற்ற மாறிகளுக்கேற்ப இருவகையுண்டு. K ராண்டம் மாறிகளின் நிகழ்தகவுக் கோவை (Probability function) $f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_k, \theta)$ ஆகும்; இங்கு θ என்பது பரவலின் எல்லாச் சுட்டெறுப்புக்களுக்காக (Parameters) நிற்கிறது. X_1, X_2 என்ற இரு மாறிகளுக்குரிய நிகழ்தகவுக் கோவை $f(x_1, x_2, \theta)$ என்ற வடிவில் அமையும்.

இரட்டை மாறிப்பரவல் (Bivariate Distribution)

இரு மாறிகளின் மதிப்புகளும், அவற்றின் நிகழ்தகவுகளும், அம்மாறிகளின் நிகழ்தகவுப் பரவலாக அமையும். ஒரு நாணயத்தை இரு தடவைகள் சுண்டுவோம்.

விளைவுக் கணம் $= \{HH), (HT), (TH), TT)\}$.

இங்கு H என்பது தலையையும், T என்பது பூவையும் குறிக்கும். எனில்,

$$P\{H,H\} = P\{H,T\} = P\{T,H)\} = P\{T,T\} = \frac{1}{4}.$$

தலையின் எண்ணிக்கை x எனவும், பூவின் எண்ணிக்கை y எனவும் இருமாறிகளாகக் கொண்டால் $x = 0, 1, 2,\ y = 0, 1, 2$ ஆகும்.

எனவே,

$$X = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x = 0 \\ \frac{2}{4} & x = 1 \\ \frac{1}{4} & x = 2 \\ 0 & \text{வேறு } x\text{-ல்} \end{cases}$$

$$Y = g(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & y = 0 \\ \frac{2}{4}, & y = 1 \\ \frac{1}{4}, & y = 2 \\ 0 & \text{வேறு } y\text{-ல்} \end{cases}$$

$f(x, y)$ என்பது X, Y-ன் சேர்ந்த நிகழ்தகவுக் கோவையாகும்.

x / y	0	1	2	
0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

$$f(x,y) = x = y, \quad y = 0\text{-ல் } \frac{1}{4}$$

$$= x = 1, \quad y = 1\text{-ல் } \frac{1}{2}$$

$$= x = 0 \quad y = 2\text{-ல் } \frac{1}{4}$$

$$= \text{வேறு } x, y \text{ களில் } 0$$

என்வே நிகழ்தகவுப் பரவல்

$$f(x, y) = \begin{cases} f(0, 2) = \frac{1}{4} \\ f(1, 1) = \frac{1}{2} \\ f(2, 0) = \frac{1}{4} \\ f(x, y) = 0 \quad \text{வேறு மதிப்புகளில்} \end{cases}$$

ஓரப்பரவல் (Marginal distribution)

மேலே கண்ட இரு வழிப்பட்டியலில் ஓரங்களில் உள்ள $\sum_x f(x, y)$, $\sum_y f(x, y)$ என்பன முறையே Y, X களின் தனித்தனி நிகழ்தகவுப் பரவலாகும். இங்கு $\sum_x$ என்பது x-ஓடு பொருந்திய கூட்டலையும், $\sum_y$ என்பது y-யோடு பொருந்திய கூட்டலையும் காட்டுகின்றன

எனவே, X ன் ஓரப்பரவல்

$$f(x) = \sum_y f(x, y) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x, y \text{ என்பன தொடர்} \\ \text{பற்ற மாறிகளானல்} \end{array} \right\}$$

$$= \int_y f(x, y)\, dy. \qquad \left\{ \begin{array}{l} x, y \text{ என்பன தொடர்} \\ \text{மாறிகளானல்} \end{array} \right\}$$

இதுபோலவே Y-ன் ஓரப்பரவல்

$$g(y) = \sum_x f(x, y) \quad \left\{ \begin{array}{l} x, y \text{ என்பன தொடர்} \\ \text{பற்ற மாறிகளானல்} \end{array} \right\}$$

$$= \int_x f(x, y)\, dx \quad \left\{ \begin{array}{l} x, y \text{ என்பன தொடர்} \\ \text{மாறிகளானல்} \end{array} \right\}$$

எடுத்துக் காட்டுக்கணக்கு

X, Y ஆகியவற்றின் இணைந்த பரவல் வருமாறு :

$$f(0, 1) = \frac{1}{27};\ f(0, 2) = \frac{5}{27};\ f(0, 3) = \frac{6}{27}$$

$$f(1, 1) = \frac{2}{27};\ f(1, 2) = \frac{4}{27};\ f(1, 3) = \frac{4}{27}$$

$$f(2, 1) = \frac{1}{27};\ f(2, 2) = \frac{2}{27};\ f(2, 3) = \frac{2}{27}$$

x, y-ன் வேறு மதிப்புகளில் $f(x, y) = 0$ எனில் X, Y ஆகிய வற்றின் ஓரப்பரவல்களைக் காண்க.

இதற்குரிய இருவழிப்பட்டியல் வருமாறு :

x / y	0	1	2	3	
0	0	0	0	0	0
1	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{27}$	0	$\frac{4}{27}$
2	$\frac{5}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{2}{27}$	0	$\frac{11}{27}$
3	$\frac{6}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{2}{27}$	0	$\frac{12}{27}$
	$\frac{12}{27}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{5}{27}$	0	

$$f(x) = \begin{cases} x = 0\text{-ல் } \frac{12}{27} \\ x = 1\text{-ல் } \frac{10}{27} \\ x = 2\text{-ல் } \frac{5}{27} \\ \text{வேறு } x\text{-ல் } 0 \end{cases} \qquad g(y) = \begin{cases} y = 1\text{-ல் } \frac{4}{27} \\ y = 2\text{-ல் } \frac{11}{27} \\ y = 3\text{-ல் } \frac{12}{27} \\ \text{வேறு } y\text{-ல் } 0 \end{cases}$$

எடுத்துக் காட்டுக் கணக்கு

$$f(x, y) = \begin{cases} x > 0, y > 0\text{-ல் } k\, e^{-x-2y} \\ \text{வேறு இடங்களில் } 0 \end{cases}$$ என்பது

ஒரு அடர்த்திக்கோவை. X, Y-ன் ஓரப்பரவல்களைக் காண்க.

$f(x, y)$ என்பது ஒரு அடர்த்திக் கோவை

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1.$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ke^{-x-2y} = 1.$$

$$i.e. \quad k \int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx \int_{0}^{\infty} e^{-y} dy = 1$$

$$(\text{அ-து})\ k \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

$$\therefore \quad k = 2.$$

$$\therefore \quad f(x, y) = \begin{cases} x > 0, y > 0\text{-ல் } 2\, e^{-x-2y} \\ \text{வேறு இடங்களில் } 0 \end{cases}$$

$$X\text{-ன் ஓரப்பரவல்} = f(x) = \int_{0}^{\infty} 2e^{-x-2y}\, dy$$

$$= 2e^{-x}\int_0^\infty e^{-2y}\cdot dy = e^{-x}$$

இது போலவே Y-ன் ஓரப்பரவல்

$$g(y) = \int_0^\infty 2e^{-x-2y}\ dx$$

$$= e^{-y.2}\int_0^\infty e^{-x}\cdot dx = 2\,e^{-2y}$$

$$\therefore\ f(x) = \begin{cases} x > 0\text{-ல் } e^{-x} \\ \text{வேறு } x\text{-ல் } 0 \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} y > 0\text{-ல் } 2e^{-2y} \\ \text{வேறு } y\text{-ல் } 0. \end{cases}$$

நிபந்தனைப் பரவல் (Conditional Distribution)

X, Y என்ற இரு ராண்டம் மாறிகளுக்குரிய நிகழ் தகவுக் கோவை $f(x, y)$ ஆக இருக்குமானால், $y = a$ என்று கொடுக்கப் பட்டுள்ள நிலையில்,

$$X\text{-ன் நிபந்தனைப் பரவல்} = f(x \mid y = a) = \left.\frac{f(x, y)}{g(y)}\right|_{y = a}$$

என வரையிலக்கணம் தரப்படுகிறது.

இது போலவே $x = b$ என்று தரப்பட்டுள்ள நிலையில்

$$Y\text{-ன் நிபந்தனைப் பரவல்} = f(y \mid x = b) = \left.\frac{f(x,y)}{f(x)}\right|_{x = b}$$

எடுத்துக் காட்டுக் கணக்கு

இதற்கு முன் எடுத்துக்காட்டப்பட்ட கணக்கில், $y = 2$ என்ற நிலையில் X-ன் நிபந்தனைப் பரவலையும், $x = 0$ என்ற நிலையில் Y-ன் நிபந்தனைப் பரவலையும் காண்க.

$y = 2$ என்ற நிலையில், X-ன் நிபந்தனைப் பரவல்

$$= f(x \mid y = 2) = \frac{f(x, y)}{g(y)} \Big| \; y = 2$$

(அ-து) $f(x \mid y = 2) = \begin{cases} x = 0 \text{ ல் } \frac{5}{27} \Big| \frac{11}{27} = \frac{5}{11} \\ x = 1 \text{ ல் } \frac{4}{27} \Big| \frac{11}{27} = \frac{4}{11} \\ x = 2 \text{ ல் } \frac{2}{27} \Big| \frac{11}{27} = \frac{2}{11} \\ \text{வேறு } x \text{ ல் } 0 \end{cases}$

$x = 0$ என்ற நிலையில் Y-ன் நிபந்தனைப் பரவல்]

$$= f(y \mid x = 0) = \frac{f(x, y)}{f(x)} \Big| \; x = 0$$

$$f(y \mid x = 0) = \begin{cases} y = 1 \text{ ல் } \frac{1}{27} \Big| \frac{12}{27} = \frac{1}{12} \\ y = 2 \text{ ல் } \frac{5}{27} \Big| \frac{12}{27} = \frac{5}{12} \\ y = 3 \text{ ல் } \frac{6}{27} \Big| \frac{12}{27} = \frac{6}{12} \\ \text{வேறு } y \text{ ல் } 0 \end{cases}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

$$f(x, y) = \frac{3}{k}(x + 1)\, e^{-y},\ 0 \angle x \angle 1, y > 0$$

$$= 0, \text{ வேறு மதிப்புகளில்}$$

$y = 1$ என்ற நிலையில் X-ன் நிபந்தனைப் பரவலையும்,

$x = \frac{1}{3}$ என்ற நிலையில் Y-ன் நிபந்தனைப் பரவலையும் காண்க.

$$\text{தற்போது, } \int_0^1 \int_0^\infty k\,(x+1)\,e^{-y}\,dx\;dy = 1$$

$$\text{(அ.து) } k \cdot \int_0^1 (x+1)\cdot dx \int_0^\infty e^{-y}\,dy = 1$$

$$\text{(அ.து) } k \cdot \frac{3}{2} = 1 \qquad \therefore\; k = 2/3.$$

$$\therefore\; f(x,y) = \frac{2}{3}(x+1)\,e^{-y}$$

தற்போது,

$$g(y) = \int_x f(x,\;y)\,dx = \frac{2}{3}e^{-y}\int_0^1 (x+1)\cdot dx$$

$$= \frac{2}{3}\cdot e^{-y}\cdot\frac{3}{2} = e^{-y}.$$

$$X\text{ன் நிபந்தனைப் பரவல்} = f(x \mid y=1) = \left.\frac{f(x,y)}{g(y)}\right|_{y=1}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}(x+1)e^{-1}}{e^{-1}}$$

$$= \frac{2}{3}(x+1)$$

இதுபோலவே Yன் நிபந்தனைப் பரவல் மாணவர் கண்டு கொள்க.

பயிற்சி

1. ஒரு இரட்டை மாறி நிகழ் தகவுப் பரவல் வருமாறு :

$$f(-1,0) = \frac{1}{15};\; f(-1,1) = \frac{3}{15};\; f(-1,2) = \frac{2}{15};$$

$$f(0, 0) = \frac{2}{15}\ ;\ f(0, 1) = \frac{2}{15},\ f(0, 2) = \frac{1}{15}$$

$$f(1, 0) = \frac{1}{15};\ f(1, 1) = \frac{1}{15};\ f(1, 2) = 2$$

வேறு x, y மதிப்புகளில் $f(x, y) = 0$.

இதன் (1) X, Y களுக்குரிய ஓரப் பரவல்களையும்,

(2) $y = 2$ என்ற நிலையில் Xன் நிபந்தனைப் பரவலையும்,

(3) $x = 0$ என்ற நிலையில் Yன் நிபந்தனைப் பரவலையும் காண்க.

2.

$$f(x, y) = \begin{cases} x < 0,\ y < 0 \text{ ல் } & 0 \\ x = 0,\ y = 0 \text{ ல் } & \frac{1}{12} \\ x = 1,\ y = 0 \text{ ல் } & 3/12 \\ x = 0,\ y = 1 \text{ ல் } & 4/12 \\ x = 1,\ y = 1 \text{ ல் } & 6/12 \\ x = 0,\ y = 2 \text{ ல் } & 7/12 \\ x = 7, 1\ y\ 7, 2 \text{ ல் } & 1 \end{cases}$$

எனில் X, Y களின் ஓரப் பரவல்களைக் காண்க. மேலும், $x = 0$ என்ற நிலையில் Yன் நிபந்தனைப் பரவலையும் காண்க.

3. $$f(x) = \begin{cases} 0 < x < 1 \text{ ல் } & \frac{2}{3}(x + 1) \\ \text{பிற } x \text{ ல் } 0 \end{cases}$$

என்பது X-ன் அடர்த்திக் கோவை.

$$g(y) = \begin{cases} y > 0 \text{ ல் } xe^{-xy} \\ \text{பிற } y \text{ ல் } 0 \end{cases}$$

என்பது Yன் அடர்த்திக் கோவை.

எனில் $P\{y \geq 2\} = \frac{1}{2} - \frac{5}{6}e^{-2}$ என நிறுவுக.

விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள்

X, Y என்பன தொடர்பற்ற இரு ராண்டம் மாறிகளானால், (0,0) பற்றிய விலக்கப் பெருக்குத் தொகை $= \mu'_{rs} = E\ (X^r Y^s)$

$$= \sum_x \sum_y x^r y^s f(x,y)$$

ஆகும்.

X, Y என்பன இரு தொடர்ராண்டம் மாறிகளானால், (0, 0) வைப் பற்றிய விலக்கப் பெருக்குத் தொகை

$$= \mu'_{rs} = \int_x \int_y x^r y^s f(x,y)\, dx\, dy$$

ஆகும்.

இது போலவே $(\bar{x}\ \bar{y})$ யைப் பற்றிய விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள்

$$\mu_{rs} = \sum_x \sum_y (x-\bar{x})^r\ (y-\bar{y})^s f(x,y)$$

அல்லது

$$\int_x \int_y (x-\bar{x})^r\ (y-\bar{y})^s f(x,y)\, dx\, dy$$

இணைபரவற்படி

x, y என்ற இரு மாறிகளின் இணை பரவற்படி (Covariance) $\sigma_{xy} = E\ \{\ (x-\bar{x})\ \ (y-\bar{y})\ \}$ என வரையிலக்கணம் சொல்லப்படுகிறது.

தேற்றம்

$$\sigma_{xy} = E\ \{\ (xy) - E\,(x)\ E\,(y)$$

நிறுவுதல் : $\sigma_{xy} = E\ \{\ (x-\bar{x})\ (y-\bar{y})\ \}$

$$= E\ \{\ xy - x\bar{y} - \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}\ \}$$

$$= E\,(xy) - E\,(x\bar{y}) - E\,(\bar{x}y) + E\,(\bar{x}\bar{y})$$

$$= E\ (xy) - \bar{y}\bar{x} - \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{y}$$

$$= E\,(xy) - \bar{x}\ \bar{y}$$

$$= E\,(xy) - E\,(x) \cdot E\,(y).$$

குறிப்பு : $\sigma_{xy} = \mu_{11}$ என்பது தெளிவாகும்.

எடுத்துக் காட்டுக் கணக்கு

$$f(x, y) \begin{cases} x = 1, y = 1 \text{ ல் } \frac{1}{8} \\ x = 2, y = 1 \text{ ல் } \frac{3}{8} \\ x = 1, y = 2 \text{ ல் } \frac{2}{8} \\ x = 2, y = 2 \text{ ல் } \frac{2}{8} \\ \text{வேறு } x, y \text{ களில் } 0 \end{cases}$$

இந்த நிகழ்தகவுப் பரவலின் X, Y மாறிகளுக்கு இணைபரவற்படி காண்க.

x / y	1	2	
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$
2	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$
	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	

$$E(x) = 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{5}{8} = \frac{13}{8}$$

$$E(y) = 1 \cdot \frac{4}{8} + 2 \cdot \frac{4}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$E(xy) = (1 \cdot 1)\frac{1}{8} + (1 \cdot 2)\frac{2}{8} + (2 \cdot 1)\frac{3}{8} + (2 \cdot 2)\frac{2}{8}$$

$$= \frac{19}{8}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{19}{8} - \frac{3}{2} \cdot \frac{13}{8} = -\frac{1}{16}$$

ஒட்டுறவுக்கெழு

x, y என்ற இரு ராண்டம் மாறிகளுக்குரிய ஒட்டுறவுக்கெழு

$$r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$= \frac{E\left\{(x-\bar{x})(y-\bar{y})\right\}}{\left[E\left\{(x-\bar{x})^2\right\} \cdot E\left\{(y-\bar{y})^2\right\}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

என்பது வரையிலக்கணமாகும்.

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

X, Y களுக்குரிய இணைந்த அடர்த்திக் கோவை

$$f(x, y) = \begin{cases} x > 0, y > 0 \text{ ல் } e^{-x-y} \\ \text{வேறு } x, y \text{ களில் } 0 \end{cases}$$

X, Y களுக்குரிய ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காண்க.

$$E(xy) = \int_0^\infty \int_0^\infty xy\, e^{-x-y}\, dx \cdot dy$$

$$= \int_0^\infty xe^{-x} dx \int_0^\infty ye^{-y} dy$$

$$E(x) E(y) = \int_0^\infty xe^{-x}\, dx \int_0^\infty ye^{-y}\, dy$$

தற்போது r_{xy}யின் தொகுதி $= E\left\{(x-\bar{x})(y-\bar{y})\right\}$

$= E(xy) - E(x) E(y)$

$= 0.$

$\therefore$ $\underline{r_{xy} = 0}$

தேற்றம்

x, y என்பன $y = ax + b$ என்ற உறவில் அமைந்தால், $|r_{xy}| = 1$.

நிறுவுதல்

$$y = ax + b$$

$$E(y) = E(ax) + E(b)$$

$$= a\,E(x) + b$$

$$\therefore\; y - E(y) = (ax+b) - [a\,E(x) + b]$$

$$= (ax+b) - (a\bar{x} + b)$$

$$(\text{அ-து}) \quad y - \bar{y} = a(x - \bar{x})$$

$$\sigma^2_{xy} = E[(x - \bar{x})(y - \bar{y})]$$

$$= E\{(x - \bar{x})\, a(x - \bar{x})\}$$

$$= E\{a(x - \bar{x})^2\}$$

$$= a\,E[(x - \bar{x})^2] = a\,\sigma_x^2$$

$$\sigma_y^2 = E[(y - \bar{y})^2]$$

$$= E\{[(ax + b) - E[(ax+b)]\}^2$$

$$= E\{[ax - E(ax)]^2\}$$

$$= E[(ax - a\bar{x})^2]$$

$$= a^2\,E[(x - \bar{x})^2] = a^2\,\sigma_x^2$$

தற்போது,

$$r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\,\sigma_y}$$

$$= \frac{a\,\sigma_x^2}{\sigma_x(\pm a)\sigma_x} = \pm 1$$

$$\therefore\; |r_{xy}| = 1.$$

நிபந்தனையோடு கூடிய எதிர்பார்த்தல்

Y கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிலையில் Xன் நிபந்தனையோடு கூடிய எதிர் பார்த்தல் என்பது $y = c$ல் Xன் நிபந்தனைப் பரவலில் Xன் எதிர் பார்த்தல் ஆகும். இதனை $E(X \mid Y)$ எனக் குறிக்கின்றோம்.

எனவே

$$E(X \mid Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x \mid y) \, dx \quad \left\{ \begin{array}{l} X, Y \text{ தொடர்} \\ \text{மாறிகளானல்} \end{array} \right.$$

அல்லது

$$\sum_{x} x f(x \mid y) \quad \left\{ \begin{array}{l} X, Y \text{ தொடர்பற்ற} \\ \text{மாறிகளானல்} \end{array} \right.$$

பயிற்சி

1. $f(x, y) = \begin{cases} 0 \angle x \angle 2,\ y \angle 0 \text{ ல் } 3x\, e^{\frac{-3y}{2}} \\ \text{வேறு } x, y \text{ களில் } 0 \end{cases}$

மாறிகளுக்குரிய ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காண்க.

2. $f(1, 1) = \frac{1}{10}$; $f(1, 2) = \frac{3}{10}$; $f(2, 1) = \frac{1}{10}$

$f(2, 2) = \frac{1}{10}$; $f(3, 1) = \frac{2}{10}$; $f(3, 2) = \frac{2}{10}$

வேறு x, y களில் $f(x, y) = 0$

இதன் இரட்டை பரவலுக்குரிய $y = 1$ என்ற நிலையில் X^2-ன் எதிர்பார்த்தலைக் காண்க.

3. $f(x, y) = 2 - x - y,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$

$= 0$, வேறு x, y களில்

எனில் (1) ஓரப்பரவல்கள் (2) நிபந்தனைப் பரவல்கள் (3) μ'_{20} (4) μ'_{02} (5) r_{xy} ஆகியவற்றினைக் காண்க.

4. $f(x, y) = x + y,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$

$= 0$, வேறு x, y களில்

X, Y களின் ஓரப்பரவல்களையும், அவற்றின் இணைப்பரவற் படியினையும் காண்க.

பல்லுறுப்பு சேர்க்கைப் பரவல்

(Multinomial Distribution)

ஒரு நிகழ்ச்சிக்குரிய சோதனை யொன்று மேற்கொள்ளப்படுவதாகக் கொள்வோம். $P_i, i = 1, 2, ...k$ என்பனவற்றை முறையான நிகழ் தகவுகளாகக் கொண்ட x_i, $i = 1, 2 ......k$ என்ற k விளைவுகளில் ஒன்று மட்டும் அச் சோதனையின் முடிவாகப் பெற்றதாகக் கொள்வோம். இத்தகு n சோதனைகள் மேற்கொள்ளப்பட்டால், $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ என்பதற்கேற்ப நிகழ்ச்சி x_1 என்பது n_1 தடவைகளிலும், x_2 என்பது n_2 தடவைகளிலும், இது போன்று பிற நிகழ்ச்சிகளை அடுத்து x_k என்பது n_k தடவைகளிலும் நிகழ்வதற்குரிய நிகழ் தகவு

$$\frac{n!}{(n_1!)(n_2!)......(n_k!)} p_1^{x_1} p_2^{x_2} .. p_k^{x_k}$$ என்பதாகும்.

நிறுவுதல் :

x_1 என்பது n_1 தடவைகளிலும், x_2 என்பது n_2 தடவைகளிலும், இது போன்றே மற்றைய நிகழ்ச்சிகளும் நிகழ்கின்ற வரிசைகளில் கீழ்க்கண்ட குறிப்பிட்ட வரிசை முறைகளைக் கவனிப்போம்.

$$\underbrace{x_1 x_1 ...... x_1}_{n_1 \text{ தடவைகள்}} \underbrace{x_2 x_2 ...... x_2}_{n_2 \text{ தடவைகள்}} .... \underbrace{x_k x_k ...... x_k}_{n_k \text{ தடவைகள்}}$$

இந்த வரிசை முறை நிகழ்வதற்குரிய தகவு $p_1^{n_1} p_2^{n_2} ...... p_k^{n_k}$ என்பது தெளிவாகும். இம்மாதிரி நிகழ்ச்சிகளின் வெவ்வேறு வரிசைமுறைகளின் எண்ணிக்கை, n பொருள்களைத் தேர்ந்தெடுத்து

ஒழுங்கு படுத்தும் முறைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாகும். இது $\frac{n!}{(n_1!)(n_2!)\ldots(n_k!)}$ ஆகும். எனவே வெளியிடப்படும் நிகழ் தகவு =

$$P_{n_1 n_2 \cdots n_k} = \frac{n!}{(n_1!)(n_2!)\cdots(n_k!)} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$$

ஆகும்.

இதற்குப் பல்வேறு உறுப்புகளின் சேர்க்கைப் பரவல் (Multinomial distribution) எனப் பெயராகும். மேலே கண்ட நிகழ் தகவு $(p_1 + p_2 + \cdots + p_k)^n$ என்று பல்லுறுப்புச் சேர்க்கை விரிவில் பொது உறுப்பாகும்.

இது $X_1, X_2 \cdots X_k$ என்ற k ராண்டம் மாறிகளுக்குரிய பல்லுறுப்புச் சேர்க்கைப் பரவலாகும். இதன் சுட்டுறுப்புகள் nம் $p_1, p_2, \cdots p_k$ ஆகும். இங்கு $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ ஆகும்.

எடுத்துக் காட்டுக் கணக்கு

ஒரு நகரில், கருப்பு தலைமுடியுடையவர்கள், செம்பட்டை தலைமுடியுடையவர்கள்; நரைமுடியுடையவர்களைப் பொறுக்குவதற்குரிய நிகழ் தகவுகள் முறையே $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{5}$ ஆகும். அங்கு 100 பேர்கள் ராண்டமாக எடுக்கப்பட்டால், அவர்களில் 40 பேர் கருப்பு முடியுடையவர்களாகவும், 20 பேர் செம்பட்டை முடியுடையவர்களாகவும், 40 பேர் நரைமுடியுடையவர்களாகவும் அமைவதற்குரிய நிகழ் தகவு யாது ?

இங்கு $n = 100$; $n_1 = 40$; $n_2 = 20$; $n_3 = 40$

$p_1 = 0{\cdot}50$; $p_2 = 0{\cdot}30$; $p_3 = 0{\cdot}20$

எனவே வேண்டிய நிகழ் தகவு,

$$f(40, 20, 40) = \frac{100!}{40!\,20!\,40!} (0{\cdot}50)^{40} (0{\cdot}30)^{20} (0{\cdot}20)^{40}$$

இதனைச் சுருக்கிக் கொள்க.

இரட்டை மாறிகளுக்குரிய இயல்நிலைப் பரவல்

$$f(x, y, \theta) = \frac{1}{2\pi \beta_1 \beta_2 (1 - \partial^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{1-\delta^2}\left[\left(\frac{x-\alpha_1}{\beta_1}\right)^2 - 2\delta\left(\frac{x-x}{\beta_1}\right)\left(\frac{x-x_2}{\beta_2}\right) + \left(\frac{y-\alpha_2}{\beta_2}\right)^2\right]}$$

$$\begin{cases} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty \\ \beta_1 > 0, \beta_2 > 0, \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} -1 < \delta < 1 \\ -\infty < \alpha_1 < \infty \\ -\infty < \alpha_2 < \infty \end{aligned} \right\}$$

என்பதை அடர்த்திக் கோவையாகக் கொண்ட X, Y என்ற ரண்டம் மாறிகள் இரட்டை இயல்நிலைப் பரவலைப் பின்பற்றும் மாறிகள் எனக் கருதப்படும். இங்கு, α_1, α_2; β_1; β_2, δ என்பன சுட்டுறுப்புகளாகும்.

$$E(X) = \alpha_1 ; \; E(Y) = \alpha_2 ; \; \sigma_x = \beta_1 ;$$

$\sigma_y = \beta_2$; $r_{xy} = \delta$ எனக் காணலாம்.

இயல்நிலை மாறிகள் X, Y-களது X-ன் ஓரப் பரவல்

$$X\text{-ன் ஓரப்பரவல்} = f(x, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, \theta) \cdot dy$$

$\dfrac{x - \alpha_1}{\beta_1} = u$; $\dfrac{y - \alpha_2}{\beta_2} = v$ என்க.

$$\therefore \quad dv = \frac{dy}{\beta_2}\,.$$

$$(x, y, \theta) = \frac{1}{2\pi\,\beta_1\,\beta_2\,\sqrt{1-\delta^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\delta^2)}[u^2 - 2\delta uv + v^2]}$$

$$\therefore \; f(x,\theta) = \frac{1}{2\pi\,\beta_1\,\beta_2\,\sqrt{1-\delta^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\delta^2)}[u^2-2\delta uv+v^2]} \cdot \beta_2 \cdot dv.$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2(1-\delta)}u^2}}{2\pi\beta_1\sqrt{1-\delta^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2-2\delta uv)}{2(1-\delta^2)}}\,.dv.$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2(1-\delta^2)}u^2}}{2\pi\beta_1\sqrt{1-\delta^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{[(v-\delta u)^2-\delta^2u^2}{2(1-\delta^2)}}\,dv.$$

$$= \frac{e^{-\frac{u^2}{2(1-\delta^2)}}\,e^{\frac{\delta^2u^2}{2(1-\delta^2)}}}{2\pi\beta_1\sqrt{1-\delta^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\sqrt{1-\delta^2}.\,dt.$$

$$\left[\frac{v.du}{\sqrt{1-\delta^2}} = t \text{ எனவே}\right]$$

$$= \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{2\pi\beta_1}\sqrt{2\pi}$$

$$= \frac{e^{-u2/2}}{\beta_1\sqrt{2\pi}} = \frac{1\cdot e}{\sqrt{2\pi}.\,\beta}^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\alpha_1)^2}{\beta_1}}$$

$$\{-\infty < x < \infty\}$$

இது $f(x, \theta)$ என்ற ஒரு இயல்நிலை மாறிப் பரவலாகும். இதுவே X-ன் ஓரப்பரவலாகும். இதற்கு $E(X) = \alpha_1$ என்றும் $\sigma_x = \beta_1$ என்றும் முன்பே கண்டுள்ளோம்,

இதுபோலவே Y-ன் ஓரப்பரவல் =

$$g(y, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta_2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\alpha_2}{\beta_2}\right)^2} \quad (-\infty\, y < \infty)$$

இரட்டை இயல்நிலை X, Y மாறிகளின் இணைபரவற்படி

$$\sigma_{xy} = E\{(X-\alpha_1)(Y-\alpha_2)\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\alpha_1)(y-\alpha_2) f(x, y)\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi\beta_1\beta_2\sqrt{1-\delta^2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\alpha_1)(y-\alpha_2)$$

$$e^{-\frac{1}{2(1-\delta^2)}\left[\left(\frac{x-\alpha_1}{\beta}\right)^2 - 2\delta\left(\frac{x-\alpha_1}{\beta_1}\right)\left(\frac{y-\alpha_2}{\beta_2}\right) + \left(\frac{y-\alpha_2}{\beta_2}\right)^2\right]} dx\, dy$$

முன்புபோலவே u, v களைப் பிரதியிட்டு தொகையீடு செய்தால், $\sigma_{xy} = \delta\beta_1\beta_2$ எனப் பெறலாம்.

ராண்டம் மாறிகளின் சார்பற்ற தன்மை

X, Y என்ற இரு மாறிகள் சார்பற்ற மாறிகளாக (Independent Variables) அமைவதற்குரிய கட்டுப்பாட்டினை முதலில் காண்போம்.

X, Y ஆகியவற்றின் தனித்தனி ஓரப்பரவல்களுக்குரிய நிகழ்தகவுக் கோவைகளின் பெருக்கற்பலன், அவற்றின் இணைந்த நிகழ்தகவுக் கோவைக்குச் சமமாயின், X, Y என்பன சார்பற்ற ராண்டம் மாறிகள் எனக் கூறுகிறோம்.

அதாவது,

$f(x, y, \theta) = f(x, \theta), g(y, \theta)$ என அமையுமானால், X, Y என்பன சார்பற்ற மாறிகளாகும்.

எனவே X, Y-ம் சார்பற்ற மாறிகளாக அமையுமானால், $f(x \mid y) = f(x)$;

$g(y \mid x) = g(y)$ என அமையுமென்பதை எளிதில் காணலாம்.

தேற்றம்

X, Y என்ற இரு ராண்டம் மாறிகளால் அமைந்த $\psi(x)$, $\phi(y)$-என்பன X, Yகளில் கோவைகளாகவும் ராண்டம் மாறிகளாகவுமிருந்தால்,

$$E[\psi(x)\phi(y))] = E[\psi(x)]E[(\phi(y)]$$

நிறுவுதல்

X, Y என்பன சார்பற்ற ராண்டம் மாறிகள். முதலாவதாக X, Y என்பன தொடர் மாறிகள் என்க.

$$E[\psi(X)\ \phi(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} \psi(x)\phi(y)\ f(x)\ g(y)\ dx\ dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\ \phi(y) f(y)$$

($\because X, Y$ சார்பற்றவை)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) f(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)\, g(y)\, dy$$

$$= E[\psi(x)]\ E[\phi(y)]$$

இது போன்றே X, Y என்பன தொடர்பற்ற மாறிகளாக அமைகின்ற நிலையில், மாணவரே நிறுவலை எழுதிக் கொள்ளலாம்.

தேற்றம்

X, Yயும் இரு சார்பற்ற மாறிகளானால், அவைகளின் இணைபரவற்படி பூஜ்யமாகும்.

பொதுவாக, இதன் மறுதலை உண்மையன்று. ஆனால், X, Y என்பன இயல் நிலைச்சார்பற்ற மாறிகளானால், மறுதலையும் மெய்யேயாகும்.

$$\sigma_{xy} = E[(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})]$$
$$= E(X - \bar{X})\ E(Y - \bar{Y})$$

பல்லுறுப்பு சேர்க்கைப் பரவல்

$$= [E(X) - \bar{X}][E(Y) - \bar{Y}]$$
$$= (\bar{X} - \bar{X})(\bar{Y} - \bar{Y}) = 0.$$

பயிற்சி

· X, Y களின் சேர்ந்த அடர்ந்திக் கோவை வருமாறு.

$$f(x,y) = \frac{2}{5}(x+2)e^{-y}, 0 < x < 1, y > 0$$
$$= 0 \qquad \text{வேறு } x,y \text{ களில்}$$

X, Y என்பன சார்பற்ற மாறிகள் என நிறுவுக.

2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+1)(2y+1)}{9}, & 0 \angle x \angle 1, 0 \angle y \angle 2 \\ 0 & , \text{வேறு } x, y \text{ களில்} \end{cases}$

X, Y என்பன சார்பற்ற மாறிகள் தானு என்பதைக் காண்க.

3. $f(x, y) = \begin{cases} 2, 0 \angle x \angle 1, 0 \angle x \angle y \angle 1 \\ 0 \text{ வேறு } x, y \text{ களில்} \end{cases}$

(1) X, Y என்பன சார்பற்ற ராண்டம் மாறிகள் தானு என்பதை ஆய்க.

(2) $y = \frac{1}{2}$ என்ற நிலையில் X-ன் நிபந்தனைப் பரவலைக் காண்க.

(3) $y = \frac{1}{2}$ எனற நிலையில் X-ன் நிபந்தனை எதிர்பார்த்தலைக் காண்க.

(4) $P(0 \le x < 2 \mid y = \frac{1}{2})$ என்பதன் மதிப்பைக் காண்க.

4. X, Y என்பன சார்பற்ற மாறிகளானுல், $X + Y$, $X - Y$, என்பனவற்றின் இணைந்த பரவற் படியினைக் காண்க.

செவ்வகப் பரவல் (Rectangular Distribution)

$$f(x, 0) = \frac{1}{\beta - \alpha}, \alpha \angle x \angle \beta, \alpha \not> 0$$

$$= 0 \text{ [வேறு } x \text{ ல்]}$$

என்பதை அடர்த்திக் கோவையாகக் கொண்ட நிகழ் பரவலுக்கு செவ்வகப் பரவல் அல்லது சீரான பரவல் (Rectangular uniform distribution) எனப் பெயராகும். இப்பரவல் செவ்வக வடிவில் அமைவதால் இது இப்பெயர் பெற்றது. X என்ற மாறி இதில் x_i, $i = 1, 2, \ldots n$ என்ற மதிப்புகளைப் பெறும் x_i களின் நிகழ் தகவுகளும் எல்லா i மதிப்புகளும் ஒன்றேயாகும்.

இப்பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள்

$$\mu'_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x, \theta)\, dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} x^r \cdot \frac{dx}{\beta - \alpha}$$

$$= \frac{\beta^{r+1} - \alpha^{r+1}}{(\beta - \alpha)(r+1)}$$

$r = 1, 2, \ldots\ldots$ என்ற மதிப்புகளில் வெவ்வேறு விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளைக் காணலாம்.

செவ்வகப்பரவலின் பரவல்கோவை

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) \cdot dx$$

$$= 0 + \int_{\alpha}^{x} \frac{1}{\beta - \alpha}\, dx$$

$$= \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}$$

$$\text{இங்கு } P\{x \geq d\} = \int_d^{\infty} f(x) \cdot dx = \frac{\beta - d}{\beta - \alpha}$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

1 முதல் 100 வரை குறிக்கப்பட்டுள்ள ஒரு வட்டச்சுழல் தகடு உள்ளது. சுழற்றிவிட்டால், முள், எல்லா எண்குறிகளிலும் நிற்பதற்குச் சமவாய்ப்புடையது. 3 தடவை சுற்றிவிட்டால், அவைகளில் 2 தடவைகளில் முள்ளானது 20 ற்கும் 30 ற்கு மிடையே நிற்பதற்குரிய நிகழ்தகவு காண்க.

இங்கு X என்பது ஒரு செவ்வக மாறி.

ஏதாவது ஒரு சுற்றில் வேண்டிய இடத்தில் முள் நிற்பதற்குரிய நிகழ்தகவு

$$= \int_{20}^{30} f(x)\, dx$$

$$= \int_{20}^{30} \frac{1}{100}\, dx$$

$$= \frac{(30 - 20)}{100} = \frac{1}{10}$$

∴ வேண்டிய நிகழ்தகவு (ஈருறுப்பு நிகழ்தகவின்படி)

$$= \frac{3 \cdot 2}{2!} \left(\frac{1}{10} \right)^2 \left(\frac{9}{10} \right) = 0{\cdot}0027$$

அடுக்குக் குறிப்பரவல் (Exponential Distribution)

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta}\, e^{-\frac{x}{\theta}} \quad (x > 0, \theta > 0)$$

$$= 0, \text{ (வேறு } x \text{ ல்)}$$

என்பதை அடர்த்திக் கோவையாகக் கொண்ட பரவலுக்குப் பெயர் அடுக்குக்குறிப் பரவலாகும்,

அடுக்குக் குறி பரவலின் பரவற் கோவை

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot dx$$

$$= \int_{0}^{x} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx$$

$$= 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}$$

இங்கு $P\{x \geq d\} = \int_{d}^{\infty} f(x)\, dx = e^{-\frac{d}{\theta}}$

காம்மா பரவல் (Gamma Distribution)

$$f(x, \theta) = k\, x^{\alpha - 1} \cdot e^{\frac{-x}{\beta}}, \; x > 0, \; \beta > 0$$

$$= 0, \text{ வேறு } x\text{-ல்}$$

என்பதை அடர்த்திக் கோவையாகக் கொண்ட நிகழ்தகவுக் கோவையை காம்மா பரவல் (Gamma distribution) என அழைக்கின்றோம்.

இங்கு k-ன் மதிப்பைக் காணுதல்

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, 0)\, dx = 1$$

(அ-து) $$\int_{0}^{\infty} k \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}} \cdot dx = 1$$

$\frac{x}{\beta} = t$ என்க.

$$dx = \beta\, dt$$

$$\therefore \int_0^\infty k \cdot \beta^{\alpha-1} \cdot t^{\alpha-1} \cdot e^{-t} \beta\, dt = 1$$

$$\text{(அ-து) } k\, \beta^{\alpha}\, \Gamma(\alpha) = 1 \quad \left\{ \because \int_0^x t^{x-1} e^{-x}\, dx = \Gamma(x) \right\}$$

$$\therefore \quad k = \frac{1}{\beta^{\alpha}\, \Gamma(x)}$$

குறிப்பு :

1. $\alpha = 1$ எனில் இது அடுக்குக் குறிப் பரவலாகும்.

2. $\alpha = \frac{n}{2}$, $\beta = 2$ எனில் இது கைவர்க்கப் பரவலாகும்.

காம்மா பரவலின் விலக்கப்பெருக்குத் தொகையை உருவாக்கும் கோவை

$$M_x(t) = E\left(e^{tx}\right) = \int_0^\infty e^{tx} \cdot \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{\frac{-x}{\beta}} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x\left(\frac{1}{\beta}-t\right)} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)\left(\frac{1}{\beta}-1\right)} \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} \cdot dy$$

$$\left\{ y = x\left(\frac{1}{\beta} - t\right) \text{ என வைக்கவும்} \right\}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)\left(\frac{1}{\beta}-t\right)^{\alpha}} = \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha}}$$

$$\therefore M_x(t) = 1 + \alpha \cdot \beta t + \alpha \cdot \frac{(\alpha +}{2!} (\beta t)^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\beta t)^3}{3!} + \ldots\ldots$$

பயிற்சி

1. ஒரு நகரில் 50000 லிட்டருக்கு மேல் ஒரு நாளைக்குப் பால் செலவாகிறது. $\theta = 5000$ என்ற மதிப்பினைக் கொண்ட ஒரு அடுக்குக் குறிப் பரவலில் ஏறத்தாழ இது அமைகிறது. ஒவ்வொரு நாளும் நகரின் பால் சேமிப்பு 100,000 லிட்டர்களாகும். ஏதாவது இரு நாட்களை எடுத்துக் கொண்டால், அவ்விரு நாட்களுக்கும் இச் சேமிப்புப் பால் போதுமானதாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு காண்க.

2. காம்மா பரவலில் மூல அளவோடு பொருந்திய

$$\mu'r = \frac{\beta^t}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha + r)$$ என நிறுவுக.

3. ஒரு இடத்தில் ஒவ்வொரு நிமிடத்திலும் விழும் மழையின் அளவுகள் எடுக்கப்பட்டன. இவ்வளவுகள் $\theta = 2$ என்ற மதிப்பையுடைய அடுக்குக்குறிப்பரவலைப் பின்பற்றுகின்றன. எனில் 3 நிமிடங்களுக்கு மேலாகத் தொடர்ந்து மழை பெய்வதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது? ஏற்கனவே 2 நிமிடங்கள் மழை பெய்து விட்டால், இன்னும் ஒரு நிமிடத்திற்குத் தொடர்ந்து மழை பெய்வதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது?

4. ஒரு வியாபாரியின் விற்பனை வரிக்கணக்கு $\theta = 4$ என்ற மதிப்புடைய அடுக்குக்குறி பரவலைப் பின்பற்றுகிறது. வரி விற்பனை 5% விதிக்கப்படுகிறது. எனில் அவரது விற்பனை ரூ. 10,000 ற்கு மேலாக அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு யாது ?

5. செவ்வகப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி

$\frac{\beta + \alpha}{2}$ எனவும், திட்டவிலக்கம் $\frac{\beta - \alpha}{2\sqrt{3}}$

எனவும் நிறுவுக.

இயல் நிலைப் பரவல்

இயல் நிலைப் பரவலைப்பற்றி முன்பே கண்டோம். தற்போது இதன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகையை உருவாக்கும் கோவையினைக் காண்போம்.

X என்பது ஒரு இயல் நிலைமாறி என்க.

X-ன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகையை

உருவாக்கும் கோவை $= M_x(t)$

$$= E\left(e^{tx}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \, dx$$

தற்போது $X-\bar{x}$ யின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகையை உருவாக்கும் கோவை

$$= M_{x-\bar{x}}(t) = E\left[e^{t(x-\bar{x})}\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(x-\bar{x})} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty - \frac{y^2}{2\sigma^2}} \, dy \cdot \left[\begin{matrix} y = x-\bar{x} \\ \text{என்க} \end{matrix}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2\sigma^2}\left[2ty\sigma^2 - y^2\right]} \cdot dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[y^2 - 2\sigma^2 ty + \sigma^4 t^2\right] + \frac{t^2\sigma^2}{2}} \cdot dy$$

$$= \frac{e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\sigma^2 t)^2}\cdot dy$$

$$= \frac{e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\cdot dy \qquad \left[u = \frac{y-\sigma^2 t}{\sigma}\right]$$

$$= \frac{e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi} = e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

தற்போது $M_{x-\bar{x}}(t) = E\left[e^{t(x-\bar{x})}\right]$

$$= E\left[e^{tx}\right]\cdot E\left[e^{-t\bar{x}}\right]$$

$$= e^{-t\bar{x}} M_{x}(t)$$

$$\therefore\ M_x(t) = e^{t\bar{x}} M_{x-\bar{x}}(t)$$

$$\therefore\ M_x(t) = e^{t\bar{x}}\, e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

$$= e^{t\bar{x}+\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

குறிப்பு :

$$M_{\frac{x-\bar{x}}{\sigma}}(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

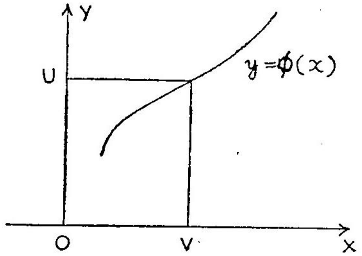
எனவே $e^{\frac{t^2}{2}}$ என்பது தரப்படுத்தப்பட்ட இயல் நிலைப் பரவலுக்குரிய விலக்கப் பெருக்குத்தொகையை உருவாக்கும்

தேற்றம்

$y = \phi(x)$ என்பது ஒரு வளருகின்ற அல்லது குறைகின்ற மானடானிக் வகையீடு செய்யத் தகுந்த கோவையெனில், y-ன் அடர்த்திக் கோவை

$$f_1(y) = f_2(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|$$ என்பதாகும்.

இங்கு $f(x)$ என்பது X என்ற ராண்டம் மாறியின் அடர்த்திக் கோவையாகும்.



$y = \phi(x)$ என்பது படத்தில் காட்டியுள்ள வளைகோடு என்க.

Y-ன் பரவல்கோவை

$$F_y(X) = \int_{-\infty}^{u} f_1(y)\, dy$$

$$= P\{y \le u\}$$

$$= P\{\phi(x) \le u\}$$

படத்தின் மூலம்

$$P\{\phi(x) \le u\} = P\{x \le v\}$$

$$= \int_{-\infty}^{u} f_2(x) \cdot dx$$

$$= F_x(v)$$ என்க.

v, v என்ற இரு மதிப்புகளுக்கும் மேலே கண்டது பொருந்தும்.

$$\therefore \quad F_y \quad (u) = F_x\,(v)$$

$$\therefore \quad \frac{dF_y\,(u)}{du} = \frac{dF_x\,(v)}{du}$$

$$=$$

ஆனல் Z என்ற ராண்டம் மாறியின் பரவல் கோவை $F(z)$ எனில், அதன் அடர்த்திக் கோவை.

$$f\ (z) = \frac{dF\,(z)}{dz} \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore \quad f_1\ (y) = f_2\ (x)\ \frac{dx}{dy}$$

இது போலவே $y = \phi\ (x)$ என்பது ஒரு குறையும் கோவையாக உள்ள போதிலும், தேற்றத்தை எளிதில் நிறுவலாம். எனவே பொதுவாக,

$$f_1\ (y) = f_2\ (x) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

கைவர்க்கப்பரவல்

$$f(x) = \frac{1}{2^{k/2}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot x^{\frac{k}{2}-1}\ e^{-\frac{x}{2}},\quad 0 < x < \infty$$

$$= 0 \text{ (வேறு } x\text{-ல்)}$$

இங்கு k என்பது சமன்பாட்டு படி (Degrees of Freedom) ஆகும். இதில் k மட்டும் சுட்டுறுப்பு.

இதனை அடர்த்திக் கோவையாகக் கொண்டது தான் **கைவர்க்கப்பரவலாகும்.** இதனைப்பற்றி முன்பே கண்டுள்ளோம்.

தற்போது இது இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து எவ்வாறு பெறப் படுகிறதென்பதைக் காண்போம்.

0-வை கூட்டுச் சராசரியாகவும், 1-யைத்திட்ட விலக்கமாகவும் கொண்ட இயல் நிலைப்பரவலை $N(0, 1)$ எனக் குறிப்பிடுவோம். X_i என்பது இயல்நிலை ராண்டம் மாறி என்க. $i = 1, 2, \ldots\ldots k$

எனக் கொள்வோம். எல்லா X_i-களும் சார்பற்றவையெனவும் கொள்வோம்.

$Y_i = X_i^2$ என்க.

$X^2 = Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots + Y_k$ என்க.

∴ Y_i என்பது $\alpha = \frac{1}{2}$; $\beta = 2$ என்றமைந்த காம்மா பரவலைப் பின்பற்றுகிறது.

ஏனெனில், $M_{y_i}(t) = (1-2t)^{-\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} M_{x^2}(t) &= M_{\Sigma y_i}(t), \qquad i = 1, 2, \ldots k. \\ &= E\left[e^{t\,\Sigma y_i}\right] \\ &= E\left[\pi\, e^{t y_i}\right] \\ &= \pi\, E\left[e^{t y_i}\right] \\ &= (1-2t)^{-k/2} \end{aligned}$$

எனவே விலக்கப் பெருக்குத் தொகையின் இயல்பு காட்டும் தன்மையானது X^2 என்பது $\alpha = \frac{k}{2}$, $\beta = 2$ என்ற மதிப்புகளில் காம்மா பரவலாகும். ஆனால் காம்மா பரவலின் அடர்த்திக் கோவை,

$$f(x, 0) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}, 0 < x < \infty$$

∴ X^2ன் அடர்த்திக் கோவை $= f(x, 0)$

$$= \frac{1}{2^{k/2}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot x^{\frac{k}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}, 0 < x < \infty$$

தேற்றம்

X_1, X_2 என்ற இரு சார்பற்ற ராண்டம் மாறிகள், k_1, k_2 என்பவற்றை சமன்பாட்டுப் படிகளாகக் கொண்ட கைவர்க்கப் பரவலைப் பின்பற்றினால் $Y = X_1 + X_2$ என்பது $k_1 + k_2$ என்பதைச் சமன்பாட்டுப் படியாகக் கொண்ட கைவர்க்கப் பரவலைப் பின்பற்றும்.

$$M_{x_1}(t) = (1-2t)^{-k_1/2}$$

$$M_{x_2}(t) = (1-2t)^{-k_2/2}$$

$$M_y(t) = M_{x_1}(t) \cdot M_{x_2}(t_2) \quad \{\because X_1, X_2 \text{ என்பன சார்பற்றவை}\}$$

$$= (1-2t)^{-\frac{(k_1 + k_2)}{2}}$$

எனவே தேற்றம் மெய்யாகும்.

கிளைத் தேற்றங்கள்

1. மேலே கண்ட தேற்றத்தின் n மதிப்புகளுக்கும் நீட்டலாம். $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$ என்பது $k_1 + k_2 + ... + k_n$யை சமன்பாட்டுப் படியாகக் கொண்ட கைவர்க்கப் பரவலைப் பின்பற்றும்.

2. இது போலவே, $Y = X_1 - X_2$ என்பது $k_1 - k_2$ என்பதைச் சமன்பாட்டுப் படியாகக்கொண்ட கைவர்க்கப்பரவலைப் பின்பற்றும்.

குறிப்பு :

ஒரு கைவர்க்கப் பரவலின் சமன்பாட்டுப் படியானது, தகுந்த அளவிற்குப் பெரிதாக அமையுமானால், கைவர்க்கப் பரவல் இயல் நிலைப் பரவலை மிக நெருங்கி அமையும். நடைமுறையில், $k > 30$ என்ற நிலையில் அது ஒரு இயல்நிலைப் பரவலாக அமையுமெனக் கருதலாம்.

எடுத்துக் காட்டுக் கணக்கு

X என்பது தரம் செய்யப்பட்ட இயல்நிலைப் பரவலைப் பின்பற்றினால், $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 2$ என்ற மதிப்பில் X^2 என்பது காம்மா பரவலைப் பின்பற்றும் எனக் காட்டுக.

$y = X^2$ என்க.

$y = x^2$

$$\frac{dy}{dx} = 2x = 2y^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dx}{dy} = 2y^{-\frac{1}{2}}$$

தற்போது $f_1(y) = f_2(x) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right|$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}$$

இது $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 2$, என்ற மதிப்பிற்கு காம்மா பரவலுக்குரிய அடர்த்திக் கோவையாகும். எனவே $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 2$ என்ற நிலையில் $y = X^2$ என்பது காம்மா பரவலைப் பின்பற்றும்.

தேற்றம்

$X_1, X_2, X_3 \ldots X_n$ என்ற ராண்டம் மாறிகள் $Y_1 = \phi_1(X_1 X_2 \ldots X_n)$, $Y_2 = \phi_2(X_1 X_2 \ldots X_n) \ldots\ldots Y_n = \phi_n(X_1 X_2 \ldots X_n)$ என்ற உறவுகளில் $Y_1, Y_2, Y_3 \ldots Y_n$ என்ற ராண்டம் மாறிகளுக்கு மாற்றப் படுகின்றன. $f_1(x_1 x_2 \ldots x_n)$, $f_2(y_1 y_2 \ldots y_n)$ என்பன $y_1, X_2 \ldots X_n$; $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ என்பவைகளின் முறையே அடர்த்திப் பரவல்களாகும்.

மேலும்,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} & \cdots\cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

எனில், $f(x_1\ x_2 \ldots x_n) = f_2\ (y_1\ y_2 \ldots y_n)\quad |J|$ ஆகும். இதற்குரிய நிறுவுதல் நம் பாடப்பகுதிக்கு அப்பாற்பட்டதாகும்.

எடுத்துக் காட்டுக் கணக்கு

X_1, X_2 ஆகியவற்றின் சேர்ந்த அடர்த்திப் பரவல்

$$f(x_1\ x_2) = \frac{1}{2} x, e, \ -x_2/2, 0 \angle x_1 < 2$$

$$x_2 > 0$$

$$= 0, \text{ வேறு } x_1\ x_2 \text{ களில்}$$

எனில் $X_1 + X_2$ வின் பரவலைக் காண்க.

$y_1 = x_1 + x_2$; $y_2 = x_2$ என்ற உறவுகளைக் கைக்கொள்வோம்.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

தற்போது $f_1\ (x_1\ x_2) = f_2\ (y_1\ y_2)\ |J|$

$$= f_2\ (y_1\ y_2)$$

$$f_2\ (y_1\ y_2) = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)\, e^{-y_2}$$

$0 < y_1 \leq 2$ ல்,

Y_1ன் அடர்த்திக் கோவை =

$$f(y_1) = \int_0^{y_1} \frac{1}{2}\,(y_1 - y_2)\, e^{-y_2}\, dy_2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\, y_1 - 1 + e^{-y_1}\,\right]$$

$2 < y_1 < \infty$ ல்

$$f(y_1) = \int_{y_1 - 2}^{y_1} \frac{1}{2}\,(y_1 - y_2)\, e^{-y_2}\, dy_2$$

$$= \frac{1}{2}\, e^{-y_1}\,(1 + e^2)$$

∴ வேண்டிய அடர்த்திக் கோவை =

$$f(x) = \frac{1}{2}\begin{cases} e^{-x} + x - 1;\ 0 < x \leq 2 \\ e^{-x}(1 + e^{2});\ 2 < x < \infty \\ 0;\ \text{வேறு } x\text{ல்} \end{cases}$$

ஸ்டுடண்ட் t பரவல்

ν யினைச் சமன்பாட்டுப் படியாகக் கொண்ட ஸ்டுடண்ட் t பரவலின் அடர்த்திக் கோவை

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{(\nu+1)}{2}},\ -\infty < t < \infty,\quad \nu > 0.$$

X என்பது ஒரு இயல்நிலை மாறி எனவும் Y என்பது ν யை சமன்பாட்டுப் படியாகக் கொண்ட கைவர்க்க மாறியெனவும் கொள்க. X, Y என்பவை சார்பற்றவையெனவும் கொள்வோம். எனில், X, Y யின் இணைந்த அடர்த்திக் கோவை

$$f(x, y) = (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \cdot y^{\frac{\nu}{2}-1} \cdot e^{-y/2}\quad [y > 0, -\infty < x < \infty]$$

$$= 0\ [\text{வேறு } x, y \text{ களில்}],$$

$t = \dfrac{x}{\sqrt{\frac{y}{\nu}}}$ என்க. $u = y$ என்க.

$$\therefore\ J = \begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial t}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{vmatrix} = \nu^{1/2} \cdot y^{-1/2}$$

$$f(t, u) = f(x, y)\ \nu^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\nu^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\cdot 2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \cdot u^{\frac{\nu-1}{2}} \cdot e^{-\frac{u}{2}\left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)},\ -\infty < t < \infty,\quad u > 0$$

$= 0$ வேறு இடங்களில்

தொகையீடு செய்தபின்

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, -\infty < t < \infty$$

$f(t)$ ஆனது $f(t)$ அச்சிற்கும் t_α ற்கும் சமச்சீராக அமைகிறது.

$$\int_{t_\alpha}^{\infty} f(t)\cdot dt = \alpha$$

F பரவல் :

இதன் அடர்த்திப்பரவல்

$$f(x,\theta) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}\frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{m+n}}$$

$, 0 < x < \infty$

$= 0$, வேறு x ல் $[\theta \mp (m, n)$ என்பன மிகைமுழு எண்கள்$]$, இதற்கு m, n என்ற இரு சமன்பாட்டுப்படிகள் உள்ளன.

எடுத்துக் காட்டுக் கணக்கு

$\alpha = \frac{m}{2}$, $\beta = 2$ என்ற மதிப்புகளைப் பெற்ற காம்மா பரவலை X_1 பின்பற்றுகிறதெனவும், $\alpha = \frac{n}{2}$ $\beta = 2$ என்ற மதிப்புகளைக் கொண்ட காம்மா பரவலை X_2 பின்பற்றுகிறது எனவும் கொள்க. தற்போது $F = \frac{X_1 \mid m}{X_2 \mid n}$ என்பதன் பரவலைக் காண்போம்.

X_1, X_2 என்பன சார்பற்றவையாதலால்

$f(x_1\, x_2) = f_1\,(x_1) f_2\,(x_2)$ ஆகும். இங்கு $f_1\,(x_1)$; $f_2\,(x_2)$ என்பன X_1, X_2-களின் தனித்தனி அடர்த்திக் கோவைகளாகும்.

$$\therefore\ f(x_1\, x_2) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot x_1^{\frac{m}{2}-1}\, e^{-\frac{x_1}{2}} \,.$$

$$X \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x_2^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-\frac{x_2}{2}}$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, x_1^{\frac{m}{2}-1}\, x_2^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)} \qquad x_1 >;\ x_2 > 0$$

$= 0$, வேறு x_1, x_2-களில்

$y_1 = \dfrac{x_1/m}{x_2/n}$; $y_2 = x_2$ என்ற மாறுதல்

உறவினைக் கைக் கொள்வோம்.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \frac{n}{m} \cdot \frac{1}{x_2}$$

Y_1, Y_2 ஆகியவற்றின் இணைந்த அடர்த்திக் கோவை

$$= g\,(y_1\, y_2) = f\,(x_1\, x_2) \cdot \frac{1}{|J|}$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}-1} \cdot (y_1\, y_2)^{\frac{m}{2}-1} \cdot y_2^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} \cdot$$

$$e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{m}{n} y_1\, y_2 + y_2\right]} \cdot \left(\frac{n}{m} \cdot \frac{1}{y_2}\right)^{-1}$$

$$= \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y_1^{\frac{m}{2}-1} \cdot y_2^{\frac{m+n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}y_1+1\right)y_2}$$

$$\therefore \quad f(y_1) = \int_0^{\infty} g(y_1\, y_2)\, dy_2$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{y_1^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1+\frac{m}{n}y_1\right)^{\frac{m+n}{2}}} ; 0 < y_1 < \infty$$

பயிற்சி

1. X என்பது ஒரு தரம் செய்யப்பட்ட இயல்நிலை மாறி யெனில் $|X|$ ன் பரவலைக் காண்க.

2. Xன் அடர்த்திப் பரவல்

$$f(x) = \frac{2x}{3}, \; 0 < x < 1$$
$$= \frac{3-x}{3}, \; 1 \le x < 3$$
$$= 0, \text{ பிற } x\text{ல்}$$

எனத் தரப்பட்டுள்ளது. எனில் $Y = X^2 + 1$ன் பரவலைக் காண்க.

3. $\alpha = \frac{m}{2}; \beta = \frac{n}{2}$ என்ற சுட்டுறுப்புகளைக் கொண்ட பீட்டாமாறி X எனில், $Y = \frac{nX}{m(1-x)}$ என்பது m, n ஆகியவற்றைச் சுட்டுறுப்புகளாகக் கொண்ட F பரவலைப் பின்பற்றும் எனக் காட்டுக.

4. $f(x) = x^{2}, \; x > 0$

$= 0 \quad , \text{ பிற } x\text{ல்}$

எனில் $Y = X^2$; $Y = \log X$ ஆகியவற்றின் அடர்த்திக் கோவைகளைக் காண்க.

நம்பிக்கை வரைகள்

ஒரு பரவலின் சுட்டுறுப்புக்களை முன்னதாக அதற்குரிய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட கூறுவிலிருந்து மதிப்பீடு செய்ய வேண்டிய நிலை ஏற்படும். ஏதோ ஒரு மதிப்பினைக்கண்டு, அதுவே வேண்டப்படும் சுட்டுறுப்பின் மதிப்பாகக் கொள்ளும் முறைக்கு புள்ளி மதிப்பீடல் (Point Estimation) எனப் பெயராகும். மாறாக, ஒரு இடைவெளியைக் கண்டு, அதனுள் வேண்டப்படும் சுட்டுறுப்பின் மதிப்பு அமையுமெனச் சொல்லும் முறைக்கு இடைவெளியில் மதிப்பீடல் (Interval Estimation) எனப் பெயராகும்.

தமிழ் நாட்டில் 25 வயதுடைய இளைஞர்களின் சராசரி உயரம் 5′4″ முதல் 5′7″ வரையிருக்கிறது எனக் கூறுவதாகக் கொள்வோம். எனில், இங்கு கூட்டுச் சராசரி உயர மதிப்பீடு இடைவெளி 5′4″— 5′7″ ஆகக் கொள்ளப்படுகிறது. மேலும் கூட்டுச் சராசரியானது 5′4″ — 5′7″ என்ற இடை வெளியில் 0·99 என்ற நிகழ்தகவினில் அமையுமெனக் கூறப்படலாம். அதாவது 99% கூறுகளில் நமது மதிப்பீடு சரியாக அமையுமென்பது இதன் பொருளாகும். பொதுவாக, ஒரு பரவலின் ஒரு சுட்டுறுப்பு θ என்க. அதன் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு ராண்டம் மாறியிலிருந்து $P\{t_0 \leq \theta \leq t_1\} = 1 - \alpha$ என்றவாறு அமைந்த t_0, t_1 என்ற இரு அளவைகளைக் காண்கிறோம் என்க. இங்கு (t_0, t_1) என்பது நம்பிக்கை வரைகள் (Confidential limits) ஆகும். இது $100\,(1 - \alpha)\%$ என்ற வீதத்தில் θ விற்குரிய நம்பிக்கை வரைகளாகும். t_0 என்பது கீழ் வரை: t_1 என்பது மேல் வரையாகும். $(1 - \alpha)$ என்பது நம்பிக்கை வரைக் கெழுவாகும்.

எடுத்துக் காட்டுக் கணக்கு

16 அளவுடைய ஒரு ராண்டம் கூறு $N(m, \sigma = 2)$ என்ற இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டுள்ளது

இக் கூறுவின் கூட்டுச் சராசரி 50 ஆகும். எனில், m-ன் 95% நம்பிக்கை வரைகளைக் காண்க.

$$P\{t_0 \leq m \leq t_1\} = 0.95$$

முழுமைத் தொகுதியானது இயல்நிலை பரவலாகையால்,

$t = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ என்ற ராண்டம் மாறியினைக் கருதுவோம்.

இயல்நிலைப் பட்டியலிலிருந்து 1·96 என்ற மதிப்பினைப் பெறுகிறோம்.

எனவே

$$P\left\{-1.96 \leq \frac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq 1.96\right\} = 0.95$$

எனவே $-1.96 \leq \dfrac{\bar{x} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq 1.96$ என்பது நம்பிக்கை வரைகள்

$$\therefore \quad -1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} - m \leq 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} 1.96 \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

இங்கு $\bar{x} = 50;\ \sigma = 2;\ n = 16$

$$\therefore \quad 50 - \frac{1.96}{2} \leq m \leq 50 + \frac{1.96}{2}$$

$$49.02 \leq m \leq 50.98$$

எனவே m-ன் 95% நம்பிக்கை வரைகள் (49·02, 50·98) ஆகும்.

கூட்டுச் சராசரியின் நம்பிக்கை வரைகள்

ஒரு இயல்நிலைப் பரவலில் கூட்டுச் சராசரிக்கு 95% என்ற நிலையில் நம்பிக்கை வரைகள் $\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} 1.96,\ \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} 1.96\right)$ ஆகும். 98% என்ற நிலையில் நம்பிக்கை வரைகள்

$\left(x - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} 2{\cdot}3263, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} 2{\cdot}3263 \right)$ ஆகும். வேறு கொடுக்கப்பட்டுள்ள 100 $(1 - \alpha)\%$ என்ற நிலையில் $\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ ஆகும். இங்கு 100 $(1 - \alpha)\%$ என்பதற்கேற்ற, இயல்நிலைப் பட்டியலிலிருந்து $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ வின் மதிப்பினைக் கண்டு கொள்ள வேண்டும்.

இங்கு σ-வின் மதிப்பு கொடுக்கப் படவில்லை எனக் கொள்வோம். எனில், $t_{n-1} = \frac{\bar{X} - m}{\frac{s'}{\sqrt{n}}}$ என்ற மாறி $(n - 1)$ படிகளைக் கொண்ட ஸ்டுடண்ட் t பரவலைப் பின்பற்றும். எனவே α-விற்கேற்ப ஸ்டுடண்ட் t பட்டியலிலிருந்து $t_{\frac{\alpha}{2}}$ -வைக் காண வேண்டும். எனில் இங்கு,

$$P \left\{ - t_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{x} - x}{\frac{s'}{\sqrt{n}}} \leq t_{\frac{\alpha}{2}} \right\} = 1 - \alpha \text{ ஆகும்.}$$

எனவே இதற்கேற்ற நம்பிக்கை வரைகள்

$\left(\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s'}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s'}{\sqrt{n}} \right)$ என்பதாகும்.

கூட்டுச் சராசரிகளின் வேறுபாட்டின் நம்பிக்கை வரைகள்

$N(\mu, \sigma_1)$ என்ற இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு ராண்டம் கூறு $x_1, x_2 \dots x_n$ என்க. $N(\mu, \sigma_2)$ என்ற இயல்நிலை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு ராண்டம் கூறு $y_1\ y_2 \dots y_n$ என்க. σ_1, σ_2 என்பன தெரிந்த அளவைகள் என்க. இவைகளைக் கொண்டு 100 $(1 - \alpha)\%$ என்ற வீதத்தில் $(\mu_1 - \mu_2)$ என்ற இரு சராசரிகளின் வேறுபாட்டிற்குரிய நம்பிக்கை வரையினைக் காண்போம்.

$\dfrac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ என்ற மாறி $N(0, 1)$ என்ற இயல் நிலைப் பரவலைப் பின்பற்றுகிறது. எனவே இதற்குரிய இயல் நிலைப்பட்டியலிலிருந்து α-விற்கேற்ற $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ மதிப்பினைக் காணலாம். எனில்,

$$P\left\{-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$$

$$P\left\{(\bar{x}-\bar{y})-Z_{\frac{\alpha}{2}}\left(\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) \leq \mu_1 \quad \mu_2 \leq (\bar{x}-\bar{y})\right.$$

$$\left. + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right\} = 1-\alpha$$

எனவே 100 $(1-\alpha)$ % என்ற வீதத்தில் $\mu_1-\mu_2$ வின் நம்பிக்கை வரைகள்

$$\left\{(\bar{x}-\bar{y})-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\right.$$

$$\left.(\bar{x}-\bar{y})+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2}{r_2}}\right\}$$

குறிப்பு: $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ என்ற நிலையில் σ-வின் மதிப்பு அறியப்படா நிலையை நோக்குவோம். அப்போது σ_2-யின் ஒரு தலைச் சார்பற்ற மதிப்பீடு,

$$S^2 = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1+n_2-2} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே,

$$t_{n_1+n_2-2} = \frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)}{S\left|\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right.} \text{ என்பது } n_1+n_2-2$$

வினைப் படியாகக் கொண்ட ஸ்டூடண்ட் t பரவலைப் பின் பற்றும். எனவே $100(1-\alpha)\%$ வீதத்தில் $\mu_1-\mu_2$-வின் நம்பிக்கை வரைகள்

$$\left(\bar{x}-\bar{y}-t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}},\ \bar{x}-\bar{y}+t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \right)$$

ஆகும். இங்கு $t_{\frac{\alpha}{2}}$ என்பது n_1+n_2-2 படியில் அமைந்த ஸ்டூடண்ட் t பட்டியலில் காணப்படுகிறது.

n_1+n_2-2 என்பது போதிய அளவில் பெரிதாக அமைந்தால், (μ_1, μ_2)-வின் $100(1-\alpha)\%$ வீதத்தில் நம்பிக்கை வரைகள் $(\bar{x}-\bar{y}) \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$ ஆகும். இங்கு $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ என்பது இயல்நிலைப் பட்டியலிருந்து காணப்படுகிறது.

விகிதாச்சாரங்களின் நம்பிக்கை வரைகள்

ஏதாவது ஒரு சோதனையில் வெற்றிக்குரிய நிகழ்தகவு p என்க. N சோதனைகளில் n தடவைகள் வெற்றியடைந்தன எனக்கொள்க. எனில்

$$p = \frac{x}{N} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே $\hat{} = \frac{x}{N}$ என்பது வெற்றி விகிதாச்சாரமாகும்.

ஆனால் $E\left(\hat{p}\right) = E\left(\frac{x}{N}\right) = p.$

பரவற்படி $\left(\hat{p}\right) = \frac{n(1-p)}{N}$

N மிகப் பெரியதாகயிருப்பின் $\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{N}}}$

என்ற மாறி $N(0,1)$என்ற இயல் நிலைப்பரவலைப் பின்பற்றுகிறது. எனவே கொடுக்கப்பட்ட α விற்கு இயல் நிலப்பரவலிலிருந்து

$Z_{\frac{\alpha}{2}}$ யைக் காணலாம்.

$$\therefore P\left\{-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{P(1-P)}{N}}} \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$$

$P = \dfrac{x}{N}$ எனக் கொண்டால், நம்பிக்கை வகைகள்.

$$\frac{x+\dfrac{1}{2}Z^2_{\frac{\alpha}{2}} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{x(N-x)}{N}+\dfrac{1}{4}Z^2_{\frac{\alpha}{2}}}}{N+Z^2_{\frac{\alpha}{2}}}$$

ஆனல் N போதிய அளவில் பெரிதாக இருக்குமானல்

$\dfrac{\hat{P}-P}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}}}$ என்பது ஒரு $N(0, 1)$ இயல் நிலை

மாறியாகும். எனவே

$$P\left\{-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{\hat{P}(1-\hat{P})}{N}}} \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$$

எனவே இங்கு நம்பிக்கை வரைகள்

$\hat{P} \pm Z_{\frac{d}{2}}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}}$ ஆகும்.

பரவற்படிக்குரிய நம்பிக்கை வரைகள்

$x_1, x_2 \ldots x_n$ என்பது $N(\mu, \sigma)$ என்ற இயல்நிலை தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு ராண்டம் கூறு என்க. எனில் σ^2ற்குரிய 100 (1—α)% விகிதத்தில் நம்பிக்கை வரைகளைக் காண்போம்.

$\frac{ns^2}{\sigma^2}$; $X^2{}_{n-1}$ ஆகியவற்றைக் கவனிப்போம்.

இங்கு $s^2 = \Sigma \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}$; $X^2{}_{n-1}$ என்பது (n—1) படியாகக் கொண்ட கைவர்க்கப் பரவலின் மாறியாகும். எனில் X^2பட்டியலிலிருந்து $X^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}}$, $X^2{}_{\frac{\alpha}{2}}$ என்ற இரு மதிப்புகளைக் காணலாம்.

$$P\left\{X^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{ns^2}{\sigma^2} \leq X^2{}_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha.$$

$$\therefore\ X^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{ns^2}{\sigma^2} \leq X^2{}_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{X^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}}}{ns^2} \leq \frac{1}{\sigma^2} \leq \frac{X^2{}_{\frac{\alpha}{2}}}{ns^2}$$

$$\therefore\ \frac{ns^2}{X^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{ns^2}{X^2{}_{\frac{\alpha}{2}}}$$

எனவே 100 (1—α) % வீதத்தில் σ^2யின் நம்பிக்கை வரைகள்

$$\left\{\frac{ns^2}{X^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}}},\ \frac{ns^2}{X^2{}_{\frac{\alpha}{2}}}\right\}$$ ஆகும்.

100 (1—α) % வீதத்தில் σவின் நம்பிக்கை வரைகள்

$$\left\{\sqrt{\frac{ns^2}{X^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}}}}\ \sqrt{\frac{ns^2}{X^2{}_{\frac{\alpha}{2}}}}\right\}$$ ஆகும்.

முழுமைத் தொகுதி ஒட்டுறவு கெழுவின் நம்பிக்கை வரைகள்

ஒரு இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு ராண்டம் கூறுவின் ஒட்டுறவுக் கெழு r என்க. முழுமைத் தொகுதியின் ஒட்டுறவுக் கெழு Pவின் 98% விகிதத்தில் நம்பிக்கை வரைகள் ($r \mp 2{\cdot}33$ மடங்கு rன் திட்டப்பிழை) ஆகும் ; 95% விகிதத்தில் நம்பிக்கை வரைகள் ($r \mp 1{\cdot}96$ மடங்கு rன் திட்டப்பிழை) யாகும்.

$$z = \frac{1}{2}\log\frac{1+r}{1-r} \text{ எனக் கொண்டால்}$$

P யோடு பொருந்திய z' யின் 98% விகிதத்தில் நம்பிக்கை வரைகள் ($z \mp 2{\cdot}33$ மடங்கு zன் திட்டப்பிழை) ஆகும்; 95% விகிதத்தில் அதன் நம்பிக்கை வரைகள் ($z \mp 1{\cdot}96$ மடங்கு zன் திட்டப்பிழை) ஆகும்.

பயிற்சி

1. ஒரு பெரிய குழுவில் அமைந்த பள்ளிப் பிள்ளைகளுக்குப் புத்திக் கூர்மை சோதனை நடத்தப்பட்டது. அதன் மதிப்பெண் களின் திட்ட விலக்கம் 35 எனக் காணப்பட்டது. ஒரு குறிப்பிட்ட பள்ளியில் 100 மாணவர்களுக்கு இச் சோதனையைக் கையாண்ட தில், கூட்டுச் சராசரி மதிப்பெண் 185 ஆகும்; எனவே 95%, 98% விகிதங்களில் முழுமைத் தொகுதிக்குரிய கூட்டுச் சராசரியின் நம்பிக்கை வரைகளைக் காண்க.

2. மேலே கண்ட சோதனையில் முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் அறியப்படா நிலையில், 100 பேர் கொண்ட கூறுவின் திட்ட விலக்கம் 33 ஆகக் காணப்பட்டதெனில், முழுமைத் தொகுதிக் கூட்டுச் சராசரிக்குரிய 95%, 98% விகிதங் களில் உள்ள நம்பிக்கை வரைகளைக் காண்க.

3. ஒரு அகில இந்தியப் போட்டிச் சோதனையில் மதிப்பெண் திட்ட விலக்கம் 32. சென்னையில் போட்டியிட்ட 100 மாணவர் களின் கூட்டுச் சராசரி மதிப்பெண் 190. எனில் அகில இந்திய மாணவர்களின் கூட்டுச் சராசரிக்குரிய 95% விகிதத்தில் உள்ள நம்பிக்கை வரைகளைக் காண்க.

4. ஒரு நகரில் உள்ள 15 பையன்களின் நெஞ்சளவினை ஒரு தையல்காரர் அளக்கிறார். கூட்டுச் சராசரி அளவு 40" ஆகவும், பரவற்படி 25" ஆகவும் கண்டார். நெஞ்சு அளவைகள் ஒரு இயல்நிலைப் பரவலைப் பின்பற்றினால், முழுமைத் தொகுதியின்

கூட்டுச்சராசரி அளவிற்குரிய 98% விகிதத்தில் நம்பிக்கை வரைகளைக்காண்க.

5. ஒரு விவசாயி இருவகை ஏலச்செடிகளைப் பயிர் செய்கிறார். முதல் வகையில் 10யை அளவாகக் கொண்ட ஒரு ராண்டம் கூறுவையும், இரண்டாம் வகையில் 12யை அளவாகக் கொண்ட ஒரு ராண்டம் கூறுவையும் ஆய்கிறார். சில மாதங்களில் முதல் வகை ஏலச்செடியின் கூட்டுச் சராசரி உயரம் 36அங்; 2வது வகையின் கூட்டுச்சராசரி உயரம் 35 அங். முதல் வகை $N(\mu_1\ \sigma_1 = 2)$ என்ற இயல்நிலைப் பரவலையும், இரண்டாம் வகை $N(\mu_2\ \sigma_2 = 3)$ என்ற இயல்நிலைப் பரவலையும் பின்பற்றுகின்றன. எனில், அவ்விரு முழுமைத் தொகுதிகளின் கூட்டுச் சராசரிகளின் வேறுபாட்டிற்குரிய 95% விகித நம்பிக்கை வரைகளைக் காண்க.

6. 10, 15 அளவுகளில் உள்ள இரு ராண்டம் கூறுகள் $N(\mu_1\ \sigma_1)$, $N(\mu_2\ \sigma_2)$ என்ற இயல் நிலை முழுமைத் தொகுதிகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை. அக் கூறுகளின் கூட்டுச் சராசரிகள் முறையே 50, 45 என்பனவாம். பரவற்படிகள் 16, 25 ஆகும். எனில் 90 %, 95 %, 98 % விகிதங்களில் $(\mu_1 - \mu_2)$ விற்குரிய நம்பிக்கை வரைகளைக் காண்க.

7. 100 மாணவர்கள் ஒரு தேர்வு எழுதினர். அதில் தேறாதவர்கள் 10 பேர். தேறாத மாணவர்கள் விகிதாச்சாரத்திற்கு 98% விகிதத்தில் உள்ள நம்பிக்கை வரைகளைக் காண்க.

8. 10 மாணவர்களுக்கு ஒரு புத்திக் கூர்மைச் சோதனை செய்யப்பட்டது, கூட்டுச் சராசரி மதிப்பெண் 150 ஆகவும், திட்டவிலக்கம் 35 ஆகவும் காணப்பட்டன. அக்கூறு எடுக்கப்பட்ட முழுமைத் தொகுதியின் பரவற் படிக்குரிய 98% விகித நம்பிக்கை வரைகளைக் காண்க.

9. ஒரு இருமாறி இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து 1500 இரட்டை மதிப்புகள் கொண்ட ஒரு ராண்டம் கூறு காணப்பட்டது. அக்கூறுவின் ஒட்டுறவுக்கெழு 0·2 ஆகும். எனில், 95%, 98%, விகிதங்களில் முழுமைத் தொகுதியின் ஒட்டுறவுக் கெழுக்குரிய நம்பிக்கை வரைகளைக் காண்க.

10. ஒரு ராண்டம் மாறிக்கு 50 இரட்டை மதிப்புகள் உள்ளன. அவைகளின் ஒட்டுறவுக் கெழு 0·85 எனக் காணப்பட்டது. எனில் 95% விகிதத்தில் முழுமைத் தொகுதியின் ஒட்டுறவுக் கெழுக்குரிய நம்பிக்கை வரைகளைக் காண்க.

புள்ளி மதிப்பீடு

ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் சுட்டுறுப்புகளை, அதன் கூறுகளிலிருந்து அனுமானிக்கும் இடைவெளி காணும் முறைகளை முன்னர் கண்டோம். இவ்வாறு இடைவெளியில் குறிப்பிடப் படாமல், ஒரே உறுப்பால் அல்லது மதிப்பால் குறிப்பிடலாம். முழுமைத் தொகுதிக்குரிய சுட்டுறுப்புகளின் மதிப்புகளாக திசையற்ற அவைகளை (Scalar Quantities) காணப்படுவதுண்டு. எடுத்துக் காட்டாக, ஒரு கூறுவின் கூட்டுச் சராசரியினை, அதன் முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரியாக மதிப்பிடுவது உண்டு. ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கத்தினை அதன் ஒரு ராண்டம் கூறுவின் திட்ட விலக்கத்தினைக் கொண்டு மதிப்பிடுவது உண்டு, இவ்வகையான குறிப்பிட்ட மதிப்பீடுகளுக்கு புள்ளி மதிப்பீடு (Point Estimation) எனப் பெயராகும். புள்ளி மதிப்பீடுகள் காணப்படும் ஒரு சில வழி முறைகளை இங்கு காண்போம்.

விலக்கப் பெருக்கல் முறை

ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் விலக்கப் பெருக்கங்களை, அதனது கூறுவின் விலக்கப் பெருக்கங்களைக் கொண்டு மதிப்பீடு செய்வது இம் முறையாகும். இம் முறையில் கூறுவின் விலக்கப் பெருக்கற் தொகைகள் முழுமைத் தொகுதியின் விலக்கப் பெருக்கற் தொகைகளாகக் கொள்ளப் படுகின்றன. $m_1' = \mu_1'$; $m_2' = \mu_2' = \ldots\ldots m_n' = \mu_n'$ என்ற சமன்பாடுகளால் சுட்டுறுப்புக்கள் மதிப்பிடப்பிடப்படுகின்றன.

$$\text{இங்கு } m_r' = \sum \frac{x_i^r}{n}$$

$$\mu_r' = E(x^r)$$

எடுத்துக்காட்டுக் கணக்கு

$N(\mu, \sigma)$ என்ற இயல்நிலைப் பரவலின் சுட்டுறுப்புக்கள் அதிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட n அளவுடைய ராண்டம் கூறுகளால் விலக்கப் பெருக்கல் (Method of moments) முறையில் மதிப்பிடுக.

$x_1, x_2 \dots x_n$ என்பன ஒரு கூறு என்க.

$$m_1' = \sum \frac{x_i}{n}; \quad m_2' = \sum \frac{x_i^2}{n},$$

$$E(x) = m; \quad E(x^2) = \mu_2'$$

$$m_1 = \mu_1'$$

(அ.து) m ன் மதிப்பீடு $= \bar{x}$

$$m_2' = \mu_2'$$

(அ-து) σ^2-யின் மதிப்பீடு $= m'_2 - m_1'^2$

$$= \sum \frac{x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$= \sum \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

மீப்பெரும் வாய்ப்பு முறை

(The method of Maximum Likelihood)

இம்முறையினை பேராசிரியர் $R.A.$ வப்ஷர் கண்டார். $f(x_1 \theta)$ என்ற முழுமைத் தொகுதியில் ஒரு ராண்டம் கூறு $x_1, x_2, \dots x_n$ என்க. அவைகளின் நிகழ்தகவுக் கோவைகள் $f(x_1 \theta)$; $f(x_2 \theta)$; ...... $f(x_n \theta)$ ஆகும். $L = f(x_1 \theta) \cdot f(x_2 \theta) \dots\dots f(x_n, \theta)$ என்க. இந்த L-ன் மீப்பெரு மதிப்பிலிருந்து $f(x_1 \theta)$ விற்குரிய சுட்டுறுப்புக் காணப்படுகிறது. இம்முறை, $L(\theta)$-விற்கு மீப்பெருமதிப்பினைப் பெறவில்லையெனில் பயன்படாது. $L(\theta)$-விற்குப் பல மீப்பெருமதிப்புகள் இருப்பின், அவைகளுள் மிகப் பெரியதை மீப்பெரும் மதிப்பாகக் கொள்ளவேண்டும்.

இயல்நிலைப்பரவலின்சுட்டுறுப்புகளை இம்முறையில் காணுதல்

இயல்நிலைப் பரவலில்,

$$f(x_1 \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$L = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \;\ldots\ldots f(x_n, \theta)$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma}\right]^n e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\therefore \log L = -n \log \sigma \left(\frac{-n}{2}\right) \log 2\pi \cdot \left\{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

மீப்பெருமதிப்பில், $\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = 0$

(அ · து) $\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)}{\sigma^2} = 0$ .. .. (1)

மேலும் $\frac{\partial \log L}{\partial \sigma} = 0$

(அ · து) $-\frac{n}{\sigma} + \sum \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^3} = 0$ ...... (2)

இவ்விரு சமன்பாடுகளிலிருந்து பெறப்படும், μ, σ-வின் மதிப்புகள் $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ எனில்,

$$\hat{\mu} = \bar{x}$$

$$\hat{\sigma} = \left[\sum \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}\right]^{1/2}$$

எனவே இம்முறைப்படி μ, σ ஆகியவற்றின் மதிப்பீடுகள் முறையே $\hat{\mu}, \hat{\sigma}$ ஆகும்.

பயிற்சி

1. 25 ஆப்பிள் பழங்கள் கொண்ட ஒரு கூடையில், 2 பழங்கள் அழுகி விட்டன. விலக்கப் பெருக்கல் முறையாலும், மீப்பெரும் வாய்ப்பு முறையாலும் அழுகிய பழங்களின் விகிதாச் சாரத்திற்கு மதிப்பீடுகள் காண்க.

2. θ-வைச் சுட்டுறுப்பாகக் கொண்ட அடுக்குப் பரவலுக்கு மேற்கண்ட இருமுறையாலும் மதிப்பீடுகள் காண்க.

3. $$f(x, \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}, & 0 < x < \theta \\ 0 & \text{வேறு இடங்களில்} \end{cases}$$

இந்த பரவலுக்கு θ-வின் மதிப்பீட்டை மீப்பெரும் வாய்ப்பு முறையால் காண்க.

4. $$f(x, \theta) = \frac{1}{\beta - \alpha}, \; \alpha < x < \beta, \; \alpha > \beta$$
$$= 0 \quad \text{வேறு இடங்களில்}$$

என்ற பரவலின் சுட்டுறுப்புகளுக்கு, மீப்பெரும் வாய்ப்பு முறையால் மதிப்பீடுகளைக் காண்க. கூறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளதாகக் கொள்க.

5. n அளவுடைய ஒரு கூறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளதாகக் கொண்டு

$$f(x, \theta) = (\theta + 1)\, x^{\theta}; \quad 0 < x < 1, \; \theta > 0$$
$$= 0 \quad \text{வேறு இடங்களில்}$$

என்ற பரவலின் சுட்டுறுப்பிற்கு மேற்கண்ட இரு முறைகளிலும் மதிப்பீடுகளைக் காண்க.

மதிப்பீட்டின் சிறப்புத் தன்மைக்கான இயல்புகள்.

இரு வழிகளில் ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் சுட்டுறுப்புகளுக்குரிய மதிப்பீடுகளைக் கணிக்கலாம் எனக் கண்டோம். இது தவிர, வேறு சில வழி முறைகளும் உள்ளன என்பது இங்கு குறிப்பிடத் தக்கது. இவ்வாறு பல வழிகளில் ஒரே சுட்டுறுப்பிற்குரிய மதிப்பீட்டைக் கண்டால், பல மதிப்பெண்களை நாம் பெறலாம். அவைகளுள் எது சிறந்தது என முடிவு செய்தல் வேண்டும். சில சமயங்களில், அம்மதிப்பீடு ஒருதலைச் சார்பற்றதாக (unbiased) அமையுமாயின், அதனைச் சிறந்த மதிப்பாகக் கொள்கிறோம்; வேறு சில சமயங்களில், அம்மதிப்பீடு ஒரே நிலையுடைய தன்மை (consistency) யதாக அமைந்தால், அதனையே சிறந்ததாகக் கொள்கிறோம். இது தவிர, ஒன்றுக்கொன்றுன இணைத்திறமை (Relative efficiency), போதுமான தன்மை (sufficiency), முற்றுப் பெற்ற தன்மை (completeness), மாறுத் தன்மை (invariance) போன்றவற்றாலும் ஒரு மதிப்பீட்டைச்

சிறந்ததாகக் கொள்ளலாம். எந்தத் தருணத்தில், எந்தத் தன்மையைப் பயன்படுத்தி மதிப்பீடுகளின் சிறந்தவற்றைத் தேர்ந்தெடுப்பது என்பது அனுபவத்தின் வாயிலாக அறியக் கூடியதாகும்.

ஒருதலைச் சார்பற்ற தன்மை :

θ என்ற சுட்டுறுப்பின் மதிப்பீடு $\hat{\theta}$ என்க. எனில், $E(\hat{\theta}) = \theta$ என அமையுமானால், $\hat{\theta}$ என்பது θ வின் ஒருதலைச் சார்பற்ற மதிப்பீடாகும். $E(\bar{X}) = \mu$ எனவே எந்தவொரு முழுமைத் தொகுதியிலும் கூறுவின் கூட்டுச்சராசரி, முழுமைத் தொகுதிக் குரிய கூட்டுச் சராசரியின் ஒருதலைச் சார்பற்ற மதிப்பீடாகும். ஒரு கூறுவின் பரவற்படி, முழுமைத் தொகுதி பரவற்படிக் குரிய ஒருதலைச் சார்பற்ற மதிப்பீடாக அமையாது; ஏனெனில்,

$$E(s^2) = E\left[\sum\frac{(X_i - \bar{X})^2}{n}\right] \neq \sigma^2 \cdot \text{ ஆனால்}$$

$\sum\left[\frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}\right]$ என்பது முழுமைத் தொகுதி பரவற் படிக்குரிய ஒருதலைச்சார்பற்ற மதிப்பீடாக அமையும். ஏனெனில்

$$E\left[\sum\frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}\right] = \sigma^2.$$

ஒரே நிலையுடைய தன்மை :

θ என்ற சுட்டுறுப்பின் மதிப்பீடு $\hat{\theta}$ என்க. எனில், $n \to \infty$ ஆக உள்ள நிலையில் $P\{\hat{\theta} \to \theta\} = 1$ என அமையுமானால், மதிப்பீடு $\hat{\theta}$ ஒரே நிலையுடைய தன்மையுடையதாகும் எனக் கூறுகிறோம். எனவே ஒரு மதிப்பீடு, ஒரே நிலையுடைய தன்மையைப் பெற்றிருப்பதற்குரிய நிபந்தனை $n \to \infty$ யில் $P\{\hat{\theta} \to 0\} \to 1$ ஆகும். அதாவது எந்த ஒரு கொடுக்கப்பட்டுள்ள எவ்வளவு சிறிய $\epsilon > 0$ ஆக இருந்தபோதிலும், $n \geq n_0$ ற்கு $P\{|\hat{\theta} - \theta| > \epsilon\} < \delta$ என்பதற்கேற்ப $\delta > 0$ என்ற அளவினைக்காண முடியும். இது $\hat{\theta}$ ஆனது θயை நோக்கிக் குவிகிறது எனக் கூறுகிறோம்.

தேற்றம்

θ வின் ஒருதலைச் சார்பற்ற மதிப்பீடு $\hat{\theta}$ ஆகவும், θ வின் பரவற்படி $\to 0$ ஆகவும், $n \to \infty$ ஆகவும் அமைந்தால், $\hat{\theta}$ ஆனது θ வின் ஒரே நிலையுடைய தன்மை கொண்ட மதிப்பீடாகும்.

$$P\{\ |t-E(t)|>k\}<\frac{\text{பரவற்படி}\ (t)}{k^2}$$

{ இது சௌபசெவ் சமனற்ற உறவாகும் }

இங்கு $P\{\ |\hat{\theta}-\theta|>k\}<\frac{\text{பரவற்படி}\ (\theta)}{k^2}$

இங்கு k என்பது ஏதாவது ஒரு நிலை உறுப்பு ஆனால் $n\to\infty$, பரவற்படி $(\theta)=0$

எனவே $P\{\ |\hat{\theta}-\theta|>k\}\to 0$

எனவே $\hat{\theta}$, θ வை நோக்கிக் குவிகிறது.

∴ θ வின் ஒரே நிலைஉடைய தன்மை கொண்ட மதிப்பீடு $\hat{\theta}$ ஆகும்.

குறிப்பு :

1. $\hat{\theta}$ ஆனது θ வின் ஒரே நிலையுடைய தன்மையதான மதிப்பீடெனில், $\frac{n\,\theta}{n+1}$ என்பதும் அத்தன்மையதான மதிப்பீடாகும். n ற்கு பல்வேறு மதிப்புகள் கொடுக்க, பல்வேறு ஒரே நிலையுடைய தன்மையதான மதிப்பீடுகளைப் பெறமுடியும் என்பது தெளிவாகும்.

2. ஒரே நிலையுடைய தன்மையைக் கொண்ட மதிப்பீடு, ஒருதலைச்சார்பற்ற மதிப்பீடாக அமையுமெனக் கூற முடியாது. எடுத்துக்காட்டாக, θ வின் ஒரே நிலையுடைய தன்மையையும், ஒரு தலைச்சார்பற்ற தன்மையையும் பெற்றதுமான மதிப்பீடு $\hat{\theta}$ என்க. ஆனால் $\frac{n\,\hat{\theta}}{n+1}$ என்பது θ வின் ஒரே நிலையுடைய தன்மை கொண்ட மதிப்பீடு ; ஆனால் ஒருதலைச் சார்பற்ற தன்மை கொண்டதல்ல.

பிற இயல்புகள் :

1. θ வின் ஒருதலைச் சார்பற்ற தன்மை கொண்ட மதிப்பீடு $\hat{\theta}_1$ எனவும், ஒரே நிலையுடைய தன்மை கொண்ட மதிப்பீடு $\hat{\theta}_2$ எனவும் கொள்க. எனில் $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ வின் இணைத்திறமை (Relative efficiency)

$$e = \frac{E[(\hat{\theta}_2 - \theta)^2]}{E[(\hat{\theta}_1 - \theta)^2]}$$ என்பது

வரையிலக்கணமாகும். $E(\hat{\theta}_1) = \theta = E(\hat{\theta}_2)$ என அமையுமானல்,

$$e = \frac{\text{பரவற்படி } (\hat{\theta}_2)}{\text{பரவற்படி } (\hat{\theta}_1)}$$ ஆகும்.

$e > 1$ என அமைந்தால், $\hat{\theta}_1$ ஆனது $\hat{\theta}_2$ வை விட திறமையான மதிப்பீடாகும்.

2. போதுமான தன்மை (Sufficiency) என்பதும் ஒரு நல் மதிப்பீட்டிற்குரிய குணமாகும். $f(x_1\ x_2 \ldots x_n \mid \hat{\theta})$ என்பது θ விருந்து விடுபட்ட கோவையாக அமையுமாயின், $\hat{\theta}$ போதுமான தன்மையுடையதாகும். வேறு வகையாகவும் கூறலாம். வாய்ப்புக் கோவை L யை $\hat{\theta}$, θ ஆகிய இரண்டும் கொண்ட ஒரு கோவையாகவும், θ யிலிருந்து விடுபட்ட மற்றொரு கோவையாகவும் காரணிப்படுத்தயியலுமானல், $\hat{\theta}$ என்பது θ வின் போதுமான தன்மையுடைய மதிப்பீடாகும்.

3. T என்பது ஒரு புள்ளிமாறி என்க. அதன் அடர்த்திக் கோவை $f(t, \theta)$ என்க. $E\{g(T)\} = 0$ ஆக அமையுமானல், T என்பது ஒரு முற்றுப் பெற்ற தன்மை மாறி (Complete Statistic) ஆகும். $\hat{\theta}$ என்பது இத்தகு ஒரு மாறியாக அமையுமானல், அது θ வின் முற்றுப் பெற்ற தன்மையுடைய மதிப்பீடாகும்.

4. மாருத் தன்மை :

$x_1 \cdot x_2\ \ x_n$ என்ற கூறுவைப் பயன்படுத்தி முழுமைத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி μ மதிப்பிடப்படுவதாகக் கொள்க. $T(x_1\ x_2 \ldots x_n)$ என்பது μ வின் ஒரு மதிப்பீடு என்க. x_1, x_2, x_n என்பன அடிகளில் (feet) கண்ட அளவுகள் என்க. இவற்றையே அங்குலத்தில் கண்டால், $12\,x_1$, $12\,x_2 \ldots 12\,x_n$ என்பன நேரில் கண்ட அளவைகளாக அமையும். எனில் μ வின் மதிப்பீடு $T(12\,x_1, 12x_2, \ldots\ldots 12x_n)$ ஆகும்.

$T\ (12\,x_1, 12\ x_2, \ldots\ 12\,x_n) = 12\ T\ (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)$ என அமையுமானல், இம் மதிப்பீடு ஒரு மாறுபடா மதிப்பீடாகும்.

பயிற்சி

1. ஒரு ஈருறுப்புச் சேர்க்கை நிகழ்தகவு சூழ்நிலையில் மீப்பெரு வாய்ப்பு முறையால் கண்ட வெற்றிக் கான நிகழ் தகவு pன் மதிப்பீடு ஒருதலைச் சார்பற்றதென நிறுவுக.

2. $$f(x, \theta) = \begin{cases} \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}, & x = 0, 1, \ldots N \\ 0 \text{ வேறு இடங்களில்} & 0 < p < 1 \end{cases}$$

$N =$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

என்ற பரவலில் p சுட்டுறுப்பாகும். எனில் $p^2 + 2$ வின் ஒருதலைச் சார்பற்ற மதிப்பீட்டைக் காண்க.

3. mயைச் சுட்டுறுப்பாகக் கொண்ட பாய்ஸான் பரவலின் ஒரு ராண்டம் கூறு $x_1, x_2 \ldots x_n$. mன் ஒருதலைச் சார்பற்ற மதிப்பீடு $\bar{x}$ எனக் காண்க.

4. எண்ணுறு பரவற் படியைக் கொண்ட எந்தவொரு முழுமைத் தொகுதியிலும் அதன் கூட்டுச் சராசரிக்குரிய மதிப்பீடு ஒரே நிலையுடைய தன்மையுடையதும், ஒருதலைச் சார்பற்ற தன்மையுடையதுமென நிறுவுக.

5. $N(\mu, 1)$ என்ற இயல்நிலைப் பரவலில் கூறுவின் கூட்டுச் சராசரி μவின் ஒரு போதுமான தன்மையுடைய மதிப்பீடு எனக் காட்டுக.

6. $f(1) = \theta$

$f(0) = 1 - \theta$

$f(x) = 0$, வேறு இடங்களில்,

$0 < \theta < 1$

என்று தரப்பட்டுள்ள ஒரு முழுமைத் தொகுதியில் 2 உறுப்புகளைக் கொண்ட கூறுகள் X_1, X_2 ஆகும் $X_1 + X_2$ என்ற மாறி θவின் ஒரு முற்றுப்பெற்ற தன்மையுடையதும், போதுமான தன்மையுடையது மான மதிப்பீடு எனக் காட்டுக.

7. ஒரு இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து ராண்டம் கூறுவினில், கூறுவின் கூட்டுச் சராசரியானது முழுமைத் தொகுதிக்குரிய சராசரியின் ஒரேநிலை உடைய தன்மை கொண்ட மதிப்பீடு எனக் காட்டுக.

8. $f(x, \mu) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x-\mu)^2}, -\infty < x < \infty$

என்பதை அடர்த்திக் கோவையாகக் கொண்ட காஸிஸ் முழுமைத் தொகுதியில், கூறுவின் கூட்டுச் சராசரி முழுமைத் தொகுதி கூட்டுச் சராசரியின் ஒரே நிலையுடைய தன்மை கொண்ட மதிப்பீடாகாது; ஆனல் கூறுவின் இடைநிலை அத் தன்மையதான மதிப்பீடாக அமையுமென்பதை நிறுவுக.

9. ஒரு இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு ஏாண்டம் கூறுவில் σ^2 தெரியும். எனில் μன் போதுமான தன்மையுடைய மதிப்பீடு $\bar{x}$ எனக் காட்டுக. μ தெரியுமானல்,

$s^2 = \frac{1}{n} \Sigma (x_i - \bar{x})^2$ என்பது σ^2க்குரிய ஒரு போதுமான தன்மையுடைய மதிப்பீடல்ல என்பதைக் காட்டுக. σ^2யின் போதுமான தன்மையுடைய மதிப்பீடு யாது?

பரவற்படி ஆய்வு

ஒரு புள்ளி விபரத்திலிருந்து சரியான முடிவுகள் எடுக்கப்பட வேண்டுமெனில், ஆய்வு மேற்கொள்ளப்படும் பரிசோதனையின் அமைப்பு (Design of Experiment) ஏற்ற முறையில் அமைக்கப் படல் வேண்டும். எவ்வாறெல்லாம் ஏற்ற பரிசோதனைகளை அமைக்கலாம் என்பது பற்றி இங்கு காணப்போவதில்லை. ஏற்ற முறையில் அமைக்கப்பட்ட பரிசோதனையில் கண்ட புள்ளி விபரங் கள் பகுத்தாயப்படும் பல்வேறு முறைகளை இங்கு காண்போம்.

ஒரு வழி பகுத்தாய்வு (one-way classification)

A என்ற பெருவெளி நன்செய் நிலம் என்க. அது K சிறு குழுக்களாக (sets)ப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளதென்க. ஒவ்வொரு குழுவும் n சிறு பகுதிகளாகப் (plots) பிரிக்கப்பட்டுள்ளதாக வும் கருதுக. முதல் குழுவில் உள்ள பகுதிகளில் ஒரே வகையான F_1 உரங்கள் போடப்படுகின்றன. இரண்டாம் குழுவில் ஒரே வகையான F_2 உரங்கள் போடப்படுகின்றன. iவது குழுவில் உள்ள சிறு பகுதி நிலங்களில் ஒரே வகையான F_i உரங்கள் போடப்படுகின்றன. Kவது குழுவில் F_k உரங்கள் போடப்படு கின்றன. இந்த வகை உரங்களால் விளைந்த நெல் இறுதியில் காணப்பட்டு அளக்கப்படுகின்றன. இங்கு, இந்த பல்வேறு உரங்களால் பயிரான விளைச்சலில் எந்தவித வேறுபாடுமில்லை என்பதை நமது கொள்கையாக அல்லது அனுமானமாக (Hypothesis) எடுத்துக் கொள்வோம். ஆய்வின் முடிவில் இக் கொள்கை நிராகரிக்கப்பட்டால், F_1 என்பது பிற உரங்களைவிட பயன்தரத் தக்கதா என்பதை ஆய வேண்டும்; இது போன்றே ஒவ்வொரு வகை உரத்திற்கும் ஆயவேண்டும். மேலும், பல்வேறு உரங்களால் பயிரான விளைச்சலின் வேறுபாடுகளையும் மதிப்பிட வேண்டும்.

மேலே கண்ட சோதனையில், ஒவ்வொரு குழுவின் புள்ளி யிலும் n நேரடிப் பார்வைகள் உள்ளன என்பது தெளிவாகும்.

iவது குழுவினில் jவது பார்வையினை x_{ij} என்பது குறிக்குமென்க. iவது உரமான F_i யில் விளைந்த விளைச்சல் பலனை μ_i காட்டுமென்க. e_{ij} என்பது i-ஆவது குழுவினில் j-வது பார்வையினில் நிகழும், வாய்ப்பு மாறுதல்களால் ஏற்படும் ராண்டம் பிழை என்க. எனில்

$$x_{ij} = \mu_i + e_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots\ldots k$$

$$j = 2, 1, \ldots\ldots n$$

$$= \mu + \alpha_i + e_{ij}$$ (இங்கு α_i, F_i-ஆல் ஏற்படும் விளைச்சல் மாற்றம்)

	குழு 1	குழு 2	குழு 3	...	...		குழு k	மொத்தம்
	x_{11}	x_{21}	x_{31}	...	...	...	x_{k1}	
	x_{12}	x_{22}	x_{32}	...	...	...	x_{k2}	
	x_{13}	x_{23}	x_{33}	...	...	...	x_{k3}	
	...	...	...	...	...	...	...	
	...	...	...	...	...	...	...	
	...	...	...	...	...	...	...	
	x_{1n}	x_{2n}	x_{3n}		...	...	x_{kn}	
மொத்தம்	$x_{1\cdot}$	$x_{2\cdot}$	$x_{3\cdot}$		...	...	$x_{k\cdot}$	$x_{\cdot\cdot}$

$x_{i\cdot}$ என்பது i-வது குழுவின் கூடுதல்.

$x_{\cdot\cdot}$ என்பது எல்லா பார்வைகளின் கூடுதல்.

நமது கொள்கை

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots\ldots = \mu_k$$

அ·து $H_0 : \alpha_1 = 0 = \alpha_2 = \ldots\ldots = \alpha_k.$

குழுவில் அடங்கிய மாறுபாட்டளவை (The within set Variation)

$$= S^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \left(x_{ij} - \frac{x_{i\cdot}}{n} \right)^2$$

$$= \left[\sum_{ij} x^2_{ij} - \frac{x^2_{\cdot\cdot}}{n_k} \right] - \left[\sum_i x^2_{i\cdot} - \frac{x^2_{\cdot\cdot}}{n_k} \right]$$

H_0 ஏற்ப மொத்த மாறுபாட்டளவை (Total Variation) =

$$S_0^2 = \sum_{ij} \left(x_{ij} - \frac{x_{\cdot\cdot}}{n_k} \right)^2$$

$$= \sum_{ij} x^2_{ij} - \frac{x^2_{\cdot\cdot}}{n_k}$$

குழுவிற்கிடை மாறுபாட்டளவு (The Between set Variation)

$$= S_0^2 - S^2$$

$$= n \sum_i \left(\frac{x_{i\cdot}}{n} - \frac{x_{\cdot\cdot}}{n_k} \right)^2$$

$$= \sum \frac{x_{i\cdot}^2}{n} - \frac{x^2_{\cdot\cdot}}{n_k}$$

ஆனால் $S_0^2 = S^2 + (S_0^2 - S^2)$

எனவே மொத்த மாறுபாடு = குழுவில் அடங்கிய மாறுபாடு + குழுவிற்கிடை மாறுபாடு.

நேரில் கண்ட பார்வை அளவுகள் கீழ்க்கண்ட படிகளில் கணக்கிடப்படவேண்டும்.

1. $\sum_{ij} x^2_{ij}$ என்பதையும் $x_{\cdot\cdot}$-யையும் கணக்கிடுக.

2. திருத்தக் காரணி = தி. கா, = $\frac{x^2_{\cdot\cdot}}{nk}$-யைக்கணக்கிடுக.

3. $\sum_{i=1}^{k} \frac{x^2_{i\cdot}}{n}$-யைக் கணக்கிடுக.

4 $S_0{}^2 = \sum_{ij} x^2_{ij}$ — தி. கா.யைக் கணக்கிடுக.

5. $S_0{}^2 - S^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i{}^2{}_{\cdot}}{n}$ - தி. கா.யைக் கணக்கிடுக.

6. $S^2 = S_0{}^2 - (S_0{}^2 - S^2)$-யைக் கணக்கிடுக.

7. $(S_0{}^2 - S^2/k - 1)/S^2/k\,(n-1)$-யைக் கணக்கிடுக.

$$\frac{(S_0{}^2 - S^2) \,/\, k - 1}{S^2 \,/\, k\,(n-1)} = F_{k-1},\ k\,(n-1)$$

(அ-து) இது $(k-1)$, $k\,(n-1)$ ஆகியவற்றினைச் சமன் பாட்டுப்படியாகக் கொண்ட F-பரவலைப் பின்பற்றுகிறது. இந்த பரவற்படி விகிதத்திற்கு மிகைத்தன்மைச் சோதனை செய்ய வேண்டும். மிகைத்தன்மையில்லாமலிருப்பின் H_0 என்ற கொள்கையை ஏற்றுக் கொள்ளலாம். அதாவது பல்வேறு உரங்களின் பலன் பூஜ்யமாகும். இந்த F மிகைத்தன்மையதாக அமைந்தால், H_0-யை ஏற்றுக் கொள்ள முடியாது என்பதாகும்.

இருவழிப் பகுத்தாய்வு (Two Way classification)

ஒரு வழிப்பாட்டில் k-வகை உரங்கள் ஒரே வகையான பயிர்களுக்குப் பயன்படுத்தப்படும் நிலையைக்கண்டோம். இங்கு k வகை உரங்கள் பல வகையான பயிர்களுக்குப் பயன் படுத்தப்படும் நிலையைக்காண்போம். i-வது உரம் j-வது வகையான பயிரில் பயன்படுத்தப்பட்டு, இறுதியாக விளைச்சலில்

கண்ட விளைவினை x_{ij} என்க. சாதாரணமாக விளைவு u எனில், தற்போது விளைவு $\mu_j = \mu + \alpha_j + \beta_j + e_{ij}$ ஆகும். எனவே $x_{ij} = \phi\,(\mu, \alpha_i, \beta_{ji}\ e_{ij})$.

இங்கு பொதுப்பலன் கோவை ϕ ஆகும். கொள்கை H_0 என்பது வெவ்வேறுவகை கையாளலால் பலனில் வேறுபாடில்லை என்பதாகும்.

அதாவது $H_0:\ \mu_1 = \mu_2 = \ldots\ldots = \mu_r = \mu$

அதாவது $H_0:\ \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots\ldots = \alpha_r = 0$

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots\ldots = \beta_r = 0$$

எனில் நேரில் கண்ட பார்வைகளை, இருவழிப் பாகுபடுத்த கீழ் வரும் பட்டியல் முறை காட்டும்.

	B	B_2	B_3		...	...	B_t	மொத்தம்
A_1	x_{11}	$x_{\ 2}$	x_{13}	...	...	...	x_{1t}	$x_{1\cdot}$
A_2	x_{21}	x_{32}	x_{33}	...		...	x_{2t}	$x_{2\cdot}$
A_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	...	...	...	x_{3t}	x_3
...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...
A_r	x_{r1}	x_{r2}	x_{r3}	...	...	...	x_{rt}	$x_{r\cdot}$
மொத்தம்	$x_{1\cdot}$	$x\ \cdot$	$x_{3\cdot}$	...	...	...	$x_{t\cdot}$	$x_{\cdot\cdot}$

பின் கீழ்க்கண்ட படிகளில் கணக்கிடப்படவேண்டும்.

1. $\sum_{ij} x^2_{ij}$-யும் $\sum x_{\cdot\cdot}$ யையும் கணக்கிடுக.

2. திருத்தி காரணி = தி. கா. = $\frac{x^2_{\cdot\cdot}}{r_t}$-யைக்கணக்கிடுக.

3. $T_1 = \sum \frac{x_j^2 \cdot}{t}$ -தி.காயைக் கணக்கிடுக.

4. $T_2 = \sum \frac{x^2_{\cdot j}}{r}$-தி.காயைக் கணக்கிடுக.

5. $T_3 = \sum_{ij} x^2_{ij}$-தி. காயைக் கணக்கிடுக.

6. படி $= (r - 1)(t - 1)$-யைக் கணக்கிடுக.

7. $T = \frac{T_1}{r-1}$ -யையும் $U = \frac{T_2}{t-1}$ -யையும் கணக்கிடுக.

8. $E_1 = T_3 - T_1 - T_2$ யைக் கணக்கிடுக.

9. $E = \frac{E_1}{(r-1)(t-1)}$-யைக் கணக்கிடுக.

10. $\frac{T}{E}$-யையும் $\frac{U}{E}$ -யையும் கணக்கிடுக.

$\frac{T}{E}$ என்பது $(r-1)$, $(r-1)(t-1)$-யைச் சமன்பாட்டுப் படியாகக் கொண்ட F பரவலைப் பின்பற்றும்.

$\frac{U}{E}$ என்பதும் $(t-1)$, $(r-1)(t-1)$-யைச் சமன்பாட்டுப் படியாகக் கொண்ட F பரவலைப் பின்பற்றும்,

$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots\cdots = \alpha_r = 0$ என்ற கொள்கையினை $\frac{T}{E}$ யைப் பயன்படுத்தியும் $\beta_1 = \beta_2 = \cdots\cdots \beta_t = 0$ என்ற கொள்கையினை

$\frac{U}{E}$-யைப் பயன்படுத்தியும் மிகைத்தன்மைச் சோதனை மேற் கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டுக்கணக்கு

நான்குவகை தானியங்கள் மீது மூன்றுவகை உரங்கள் தெளிக்கப்பட்டு, பரிசோதனை விளைவுகளைப் பின்வரும் பட்டியல் காட்டுகிறது.

1 உரங்களால் விளைவினில் மாறுபாடு இல்லை.

2. தானியவகைகளால் விளைவினில் வேறுபாடில்லை என்ற கொள்கைகள் மீது மிகைத்தன்மை சோதனை செய்தாய்க.

தானியவகைகள் → / உரவகைகள் ↓	A	B	C	D	மொத்தம்
A	3	4	5	4	16
B	4	6	6	6	22
C	4	7	7	6	24
மொத்தம்	11	17	18	16	62

1. $\sum_{ij} x^2_{ij} = 3^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 + 5^2 + 6^2$

$$+ 7^2 + 4^2 + 6^2 + 6^2 = 340.$$

$\sum x_{\cdot\cdot} = 62.$

2. திருத்தகாரணி $=$ தி $\cdot$ கா $= \frac{x^2_{\cdot\cdot}}{rt} = \frac{62^2}{3 \times 4} = 320 \cdot 3$

3. $T_1 = \frac{\Sigma x^2.}{t} -$ தி · கா

$$= \frac{16^2 + 22^2 + 24^2}{4} - 320\cdot3 = 8\cdot7$$

4. $T_2 = \frac{\Sigma x^2._j}{r} -$ தி · க

$$= \frac{11^2 + 17^2 + 18^2 + 16^2}{3} - 320\cdot3 = 9\cdot7$$

5. $T_3 = \Sigma x_{ij}^2 -$ தி · க $= 340 - 320\cdot3 = 19\cdot7$

6 படி $= (r - 1)(t - 1) = (3 - 1)(4 - 1) = 6$

7. $T = \frac{T_1}{r - 1} = \frac{8\cdot7}{2} = 4\cdot35$

$$U = \frac{T_2}{t - 1} = \frac{9\cdot7}{3} = 3\cdot23$$

8. $E_1 = T_3 - T_1 - T_2 = 19\cdot7 - 8\cdot7 - 9\cdot7$

$$= 1\cdot3$$

9. $E = \frac{E}{(r - 1)(t - 1)} = \frac{1\cdot3}{6} = 0\cdot213$

10. F-விகிதங்கள்

$$\frac{T}{E} = \frac{4\cdot35}{0\cdot213} = 20.$$

$$\frac{U}{E} = \frac{3\cdot23}{0\cdot213} = 15.$$

பட்டியிலின்படி 1% தரத்தில் $F_{3}, 6 = 10\cdot9$

$$F_{8}, 6 = 9\cdot78$$

எனவே நேரடிகண்ட மதிப்புகளான 20, 15 ம் முறையே இம் மதிப்புகளுக்குப் பெரியனவாகும். எனவே இரு கொள்கைகளும் ஏற்றக்கொள்ளத் தக்கனவல்ல.

ராண்டமாக்கப்பட்ட தொகுதிச் சோதனைகள் :

நெல்விளைச்சலில் t வகை உரங்களைப்போட்டு அதன் பலனைக் காண்பதற்காகத் தயாரிக்கப்பட்ட ஒரு சோதனையைக் கருதுக. மண்வளம், காலநிலைக் கட்டுப்பாடுகள் முதலியவற்றால் ஒரே தரமான (Homogeneous) ஒரு தொகுதி நிலத்தினை எடுத்துக் கொள்க. ஒரே அளவுடைய பகுதி நிலங்களாக அமையுமாறு, அவற்றினை t பகுதிகளாக (plots)ப் பிரித்துக்கொள்க. ராண்டமாக இந்த t பகுதிகளிலும் t வகை உரங்களைப்போடுக. ஒரே வகையான நெல்லை இந்த t பகுதியிலும் பயிர்செய்க. இதுமாதிரி, ε வது ஒரு இடத்தில் ஒரு தொகுதி நிலத்தினை எடுத்து, t பகுதிகளாகப்பிரித்து, ராண்டமாக t வகை உரங்களையிட்டு அதேவகை நெல்லைப்பயிர் செய்க. இதுபோன்று r தொகுதிகளில் விளைவுச்சோதனையை மேற்கொள்வோம். எனில், இங்கு விளைவுப்பலன்

$$x_{ij} = \mu \div \alpha_i + \beta_j + e_{ij}$$

α_i என்பது தொகுதியினால் ஏற்படும் பலன் (Block effects)

β_j என்பது உரவகையினால் ஏற்படும் பலன் (treatment effects)

e_{ij} என்பது ராண்டம் பிழையாகும். (random error)

இலத்தீன் சதுர சோதனை அமைப்பு :

n படியில் உள்ள ஒரு இலத்தீன் சதுர அமைப்பு என்பது n பொருட்களை, n நெட்டுப்பிரிவிலும், n படுக்கைப்பிரிவிலும் அமைக்கும் முறையாகும். 3வது படி இலத்தின் சதுரம் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

A	*B*	*C*
B	*C*	*A*
C	*A*	*B*

$A_1\ A_2 \cdots A_n;\ B_1,\ B_2, \ldots B_n;\ C_1,\ C_2 \ldots C_n$ என்ற மூன்று குழுக்களான பயிரிடும் முறைகளின் விளைவோடு பொருந்து கொள்கைகளைச் சோதிக்க இவ்வகை அமைப்புப் பயன்படும்.

இங்கு $x_{ij(k)} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + e_{ij(k)}$.

α_i என்பது படுக்கைப் பிரிவினால் உண்டாகும் விளைவு (Row effects)

β_j என்பது நெட்டுப் பிரிவினால் உண்டாகும் விளைவு (Column effects)

γ_k என்பது உழவடை முறையால் உண்டாகும் விளைவு (treatment effects)

இங்கு பரவற்படி ஆய்வுப் பட்டியல் கீழ்கண்ட வாறு தரப்பட்டுள்ளது.

1. $$\frac{\dfrac{\sum_i x^2_{i\cdot\cdot}}{n} - \dfrac{xy^2_{\cdot\cdot}}{n^2}}{n-1} = R$$ யைக் கணக்கிடுக.

2. $$\frac{\sum x^2_{\cdot j} \qquad - \dfrac{x^2_{\cdot\cdot}}{n^2}}{n-1} = C$$ யைக் கணக்கிடுக.

3. $$\frac{\dfrac{\sum_k x^2_{\cdot\cdot k}}{n} - \dfrac{x^2_{\cdots}}{k}}{n-1} = T$$ யைக் கணக்கிடுக.

4. $$\sum_{ij} x^2_{ij} - \frac{x^2_{\cdot\cdot}}{n^2} = T_1$$ யைக் கணக்கிடுக.

5. $E_1' = T_3 - T - C - R$ யைக் கணக்கிடுக.

6. $E = \dfrac{E_1}{(n-1)(n-2)}$ யைக் கணக்கிடுக.

7. $\dfrac{R}{E}, \dfrac{C}{E}, \dfrac{T}{E}$ களைக் கணக்கிடுக.

$\frac{R}{E}, \frac{C}{E}, \frac{T}{E}$ என்பன மூன்றும் $(n-1), (n-1)$ $(n-\ )$ யை சமன்பாட்டுப் படிகளாகக் கொண்ட F-பரவலைப் பின்பற்று கின்றன. இனி மிகைத் தன்மையைச் சோதனையை மேற் கொண்டு கொள்கையை ஏற்றுக் கொள்ளவோ நிராகரிக்கவோ செய்யலாம்.

பயிற்சி

1. ஒரு நிலம் 10 குழுக்களாகப் பிரிக்கப்பட்டு 3 வகையான உரங்கள் இடப்பட்டன. விளைவினைக் கீழ்க்கண்ட பட்டியல் தருகிறது.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
முதல் உரம்	150	162	159	165	170	180	170	185	190	180
இரண்டாம் உரம்	160	160	156	170	157	184	175	170	185	180
மூன்றாம் உரம்	145	155	150	165	165	162	164	170	175	170

ஒரு வழி ஆய்வினைக் கேற்ப சோதனை செய்து, உரங்களால் விளைவில் வேறு பாடில்லை என்ற அனுமானத்தை 5% தரத்தில் ஆய்க.

2. 4 வகை தானியங்களின் மூன்று 3 வகையான உரங்கள் இட்ட விளைவினைக் கீழ்க்கண்ட பட்டியல் காட்டுகிறது.

உரங்கள் \ தானிய வகைகள்	A	B	C	D
A	18	22	20	21
B	20	28	31	29
C	20	35	36	30

இருவகை பாகுபாட்டு வழியினில் (1) உரங்களால் விளை வினில் வேறுபாடில்லை (2) தானிய வகைகளால் விளைவினில் வேறுபாடில்லை என்ற கொள்கைகளை ஏற்க இயலுமாவென்பதை 1% தரத்தில் ஆய்க.

3. மூன்று வகை பருத்தி நூல் அறுபடும் திறனைக் காண மூன்று முறைகளைக் கையாண்டு ராண்டமான தொகுதி சோதனை மேற்கொள்ளப்பட்டது. அறுபடும் திறனைக் கண்ட முடிவுகளை கீழ்க்கண்ட பட்டியல் தருகிறது.

	முதல் வகை நூல்	இரண்டாம் வகை நூல்	மூன்றும் வகை நூல்
முதல் முறை	20	22	22
இரண்டாம் முறை	20	18	20
மூன்றும் முறை	18	21	24

மூன்று முறைகளும் சமமான தன்மையுடையனவே என்ற கொள்கையை 5% தரத்தில் ஆய்க.

4. ஒரு இலத்தின் சதுர அமைப்பில் கண்ட முடிவு புள்ளி விபரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

அமைப்பு

A	*B*	*C*
B	*C*	*A*
C	*A*	*B*

முடிவு

13	12	15
15	17	19
14	19	21

இதற்கேற்ற கொள்கைகளை எழுதி, அவைகளை 5%, 1% தரங் களில் ஏற்கக் கூடியனவா என்பதை ஆய்க.

செப்பைசெவ் சமனற்ற உறவும் வீக்விதியும்

தேற்றம்

X என்பது எதிர் மறையற்ற மதிப்புகளைப் (Non negative Values) பெறும் ஒரு ராண்டம் மாறியாகவும், அதன் கூட்டுச் சராசரி, பரவற்படி ஆகியன முறையே μ, σ^2 ஆகவும் அமைந்தால், எந்தவொரு $t > 0$ ற்கும்

$$F(|X - \mu| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}$$

நிறுவுதல்

X யினை ஒரு தொடர் மாறியாக முதலில் கொள்வோம்.

$K > 0$ என்ற நிலையில்,

$$E(X) = \mu = \int_0^\infty x f(x) \cdot dx$$

$$= \int_0^K x f(x)\, dx + \int_k^\infty x \cdot f(x) \cdot dx$$

$$\geq \int_k^\infty x f(x) \cdot dx \geq k \int_k^\infty f(x) \cdot dx$$

$$= k P(X \geq k)$$

$$\therefore \quad P(X \geq k) \geq \frac{E(X)}{k} \qquad \text{— (I)}$$

$Y = (X - \mu)^2$ என்க.

எனில், $E(Y) = E[(X - \mu)^2] = \sigma^2$

I-யைப் பயன்படுத்த

$$P(Y \geq t^2) \leq \frac{E(Y)}{t^2}$$

$$P(Y \geq t^2) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}$$

$$P[(X-\mu)^2 \geq t^2] \leq \frac{\sigma^2}{t^2}$$

$$\therefore \quad P[\,|X-\mu| \geq t] \leq \frac{\sigma^2}{t^2}$$

இதே முறையில் X ஒரு தொடர்பற்ற மாறியாக இருப்பினும், தேற்றத்தை நிறுவலாம்.

குறிப்பு : இதற்குப் பெயர் செப்பைஸெவ் (Chebyshev) சமனற்ற உறவு (inequality) என்பதாகும்.

தேற்றம்

வெற்றிக்குரிய வாய்ப்பு p யாகக் கொண்ட ஒரு சோதனையில் n சார்பற்ற முயற்சிகளில் (trials), S தடவைகள் வெற்றி பெற்று, இணைவெற்றி அலைவெண் $f_n = \frac{S}{n}$ ஆக அமைந்தால், எந்தவொரு $\varepsilon > 0$ ற்கும்,

$$\underset{n \to \infty}{Lt}\, P(\,|f_n - p| \geq \varepsilon) = 0 \text{ அல்லது}$$

மிகத் தெளிவாக $n > \frac{pq}{\varepsilon^2 \eta}$ என்று அமைந்த எந்த வொரு முழு வெண்ணிற்கும்,

$$P(\,|f_n - p| < \varepsilon) \geq 1-\eta$$

நிறுவுதல்

செப்பைஸெவ் சமனற்ற உறவினில் X என்பதை f_n எனக் கொள்க. $t = k\sigma$ என்க. எனில், $E(f_n) = p$;

$$\sigma f_n = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

$$\therefore \quad P\left(\leq f_n - p \mid \geq k\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

$k\sqrt{\dfrac{pq}{n}} = \varepsilon$ யெனில்,

$$P(\mid f_n - p \mid) \geq \varepsilon) \leq \frac{pq}{n\varepsilon^2} < \eta$$

$$P(\mid f_n - p \mid \leq \epsilon) \geq 1 - \eta$$

$$\therefore \quad \underset{n \to \infty}{Lt}\, P(\mid f_n - p \mid > \varepsilon) = 0$$ ஆகும்.

மிகப்பெரிய எண்களுக்குரிய வீக்விதி : (Weak Law of Large Numbers)

X என்பது ஒரு ராண்டம் மாறி என்க. அதன் $E(X) = \mu$; பரவற்படி $(X^2) = {}^{\sigma}x^2$ என்க. $X_1, X_2 \ldots\ldots X_n$ என்பன ஒரு எண்ணுறு தொடரெனில், ε, η என்ற ஒவ்வொரு மிகை எண்களுக்கும் $n \geq \dfrac{\sigma_{x^2}}{\varepsilon^2\eta}$ என்ற நிலையில்

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n}{n} - \mu\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \eta$$

நிறுவுதல் :

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_n}{n}$$

$$E(\bar{X}) = \mu \qquad \sigma^2(\bar{X}) = \frac{\sigma_x^2}{n}$$

செப்பைசெவ் உறவின்படி

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_n}{n} - \mu\right| < \varepsilon\right)$$

$$= P\left(\left|\bar{X} - \mu\right| < \sigma_{\bar{x}} \frac{\varepsilon}{\sigma_{\bar{x}}}\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2(\bar{X})}{\varepsilon^2}$$

$$= 1 - \frac{\sigma_x^2}{n\varepsilon^2}$$

$$\geq 1 - \eta.$$